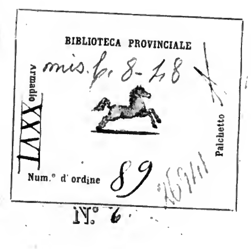

VITTORIO EM. III


PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
mis. p. 8-18
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine
89

MÉTHODE GÉNÉRALE

POUR OBTENIR LE RÉSULTAT MOYEN

D'UNE SÉRIE

D'OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

FAITES AVEC LE CERCLE RÉPÉTITEUR DE BORDA;

PAR L. PUISSANT,

Chevalier des Ordres roy de St-Louis et de la Légion-d'Honneur,
Officier supérieur au Corps royal des Ingénieurs-Géographes, etc.



PARIS,

BACHELIER, LIBRAIRE, SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER,

QUAI DES AUGUSTINS.

1823.

DE L'IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
RUE DU JARDINET, N° 12.

AVERTISSEMENT.

J'ADOPTERAI constamment dans ce Mémoire la notation suivante :

A, azimut d'un objet terrestre, compté du sud à l'ouest ;

M, sa distance zénitale.

H, latitude du lieu de l'observation ;

C, son complément ou la colatitude.

D, déclinaison boréale du soleil ;

Δ, sa distance polaire.

z, azimut du soleil, compté du sud à l'ouest ;

$Z = 180° - z$, son azimut compté du nord.

S, angle au soleil, entre son vertical et son cercle de déclinaison.

N, distance zénitale géocentrique de cet astre, correspondante à l'angle horaire P.

n, nombre des observations.

G, arc incliné entre un objet terrestre et le centre du soleil ou d'un astre quelconque ;

g, projection horizontale de cet arc.

ρ, excès de G sur g, ou réduction à l'horizon.

δ, caractéristique d'une variation quelconque.

d, caractéristique d'une différentielle.

Σ, symbole d'une somme.

Enfin, toute valeur moyenne prise, par exemple, entre les z ou les A, etc., sera désignée par z_m ou A_m, etc.

N. B. Le présent Mémoire, lu à l'Académie des Sciences le 2 septembre 1822, est accompagné de Notes principalement rédigées en faveur des jeunes Ingénieurs-Géographes qui doivent prendre part aux nombreuses et importantes observations astronomiques à faire à différens points du canevas trigonométrique de la Carte de France.

MÉTHODE GÉNÉRALE

Pour obtenir le Résultat moyen d'une série d'Observations astronomiques faites avec le Cercle répétiteur de Borda.

1. Lorsqu'on veut déterminer avec une grande précision la marche d'une pendule et le temps absolu dans un lieu dont la position géographique est connue, on prend, pendant plusieurs jours de suite, des hauteurs du soleil long-temps avant ou après son passage au méridien; et si les observations sont chaque fois au nombre de vingt ou de trente, on les groupe de 2 en 2, ou de 4 en 4, ou de 6 en 6 au plus, afin que l'angle moyen résultant de chaque série partielle corresponde, à très peu près, à l'époque moyenne : de cette manière, le calcul de l'angle horaire s'effectue autant de fois qu'il existe de ces séries partielles; et la moyenne arithmétique des résultats que ce calcul fournit est censée correspondre au milieu de la durée totale des observations. Ce procédé, malgré son extrême longueur, a l'avantage de mettre en évidence les erreurs qui peuvent affecter sensiblement les résultats partiels, et de faire juger tout d'abord si les corrections de la pendule suivent une marche régulière. C'est celui-là même qui est décrit dans la *Base du Système métrique décimal,* et qui a été constamment employé par l'illustre auteur de cet immortel Ouvrage. Cependant d'autres géomètres, dans la vue d'abréger les calculs relatifs à ce genre d'observations, sans porter atteinte à l'exactitude des résultats, ont essayé de réduire rigoureusement toutes les distances observées au milieu de leur durée, afin de pouvoir ensuite effectuer les calculs comme dans le cas d'une observation unique. La méthode que M. Soldner a proposée à ce sujet, dans les Éphémérides de Berlin, pour l'année 1818, et qui a de l'analogie, quant au fond, avec celle décrite dans la *Mesure du degré de Laponie,* par M. Svanberg, est remarquable par son élégance et sa simplicité, bien qu'elle soit incomplète à

quelques égards. Comme j'ignore si ce savant en a perfectionné la théorie et étendu l'application aux observations de latitude et d'azimut, je vais tâcher d'en indiquer le moyen, et de donner ainsi à cette méthode toute la généralité qu'elle m'a paru susceptible d'acquérir.

§ Ier.

Recherche de la correction d'une pendule par des distances zénitales absolues des astres.

2. La correction d'une pendule astronomique est son avance ou son retard sur le temps vrai, le temps moyen ou le temps sidéral. Le temps vrai se conclut ordinairement de plusieurs observations du soleil; par exemple de 20 à 30 distances zénitales prises dans un intervalle de temps très court, et non loin du cercle horaire de six heures. Malgré leur peu de durée, on risquerait souvent, en n'en formant qu'un seul groupe, de commettre quelques secondes d'erreur dans l'évaluation de la correction de la pendule, si l'on regardait l'angle moyen observé comme correspondant précisément à l'époque moyenne; car il est de fait que la distance zénitale ne varie pas proportionnellement au temps. Cette distance zénitale moyenne doit donc être augmentée ou diminuée d'une certaine quantité pour représenter effectivement celle qui convient au milieu de l'intervalle. Cherchons cette quantité, et pour cela ayons égard à la variation de distance zénitale produite par un changement d'angle horaire et de déclinaison.

Soit H la latitude du lieu; D la déclinaison du soleil, calculée pour l'époque du milieu de l'intervalle; Z l'angle au zénit ou l'azimut de l'astre; P l'angle horaire; S l'angle au centre du soleil entre le vertical de cet astre et le cercle de déclinaison; enfin N la distance zénitale. Le triangle sphérique ZPS donne ces relations :

$$(1) \qquad \cos N = \cos P \cos H \cos D + \sin H \sin D,$$

$$(2) \qquad \cos S \sin N = \sin H \cos D - \cos P \cos H \sin D,$$

$$(3) \qquad \sin S \sin N = \sin P \cos H,$$

$$(4) \qquad \sin Z \sin N = \sin P \cos D,$$

$$(5) \qquad \cos P = \sin S \sin Z \cos N - \cos S \cos Z;$$

et si l'on suppose que la variable N reçoive un accroissement quelconque δN, soit parce que l'angle horaire P varie, soit parce que la déclinaison D de l'astre change, on aura généralement, en vertu de la formule de Taylor,

$$(6) \qquad \delta N = \frac{dN}{dP}.\delta P + \frac{d^2N}{dP^2}.\frac{\delta P^2}{2} + \frac{dN}{dD}.\delta D + \frac{d^2N}{dD^2}.\frac{\delta D^2}{2} + \frac{d^2N}{dP.dD}.\delta P\delta D + \frac{d^3N}{dP^3}.\frac{\delta P^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Tirant alors de la relation (1) les valeurs des coefficiens différentiels de cette formule, il viendra, avec un peu d'attention,

$$\frac{dN}{dP} = \frac{\sin P \cos H \cos D}{\sin N} = \sin S \cos D,$$

$$\frac{d^2N}{dP^2} = \cot P . \frac{dN}{dP} - \cot N . \frac{dN^2}{dP^2} = -\frac{\cos H \cos D \cos S \cos Z}{\sin N},$$

$$\frac{d^3N}{dP^3} = -\frac{1}{\sin^2 P}\frac{dN}{dP} + \left(\cot P - 2\cot N . \frac{dN}{dP}\right)\frac{d^2N}{dP^2} + \frac{1}{\sin^2 N}\frac{dN^3}{dP^3},$$

. . . .

$$\frac{dN}{dD} = \frac{\cos P \cos H \sin D - \sin H \cos D}{\sin N} = -\cos S,$$

$$\frac{d^2N}{dD^2} = \cot N \sin^2 S,$$

$$\frac{d^2N}{dDdP} = -\text{tang}\, D . \frac{dN}{dP} - \cot N . \frac{dN}{dP} . \frac{dN}{dD}$$

$$= \frac{1}{2}\cot N \sin 2S \cos D - \sin S \sin D;$$

. . . .

ces valeurs que nous donnons sous deux formes différentes, exigent qu'on ait égard, dans les applications, aux signes des lignes trigonométriques.

Supposons maintenant qu'aux angles horaires observés P′, P″, P‴... correspondent les distances zénitales N′, N″, N‴... et les déclinai-

sons D', D'', D'''..., et que l'on ait

$$P' = P + \delta P', \quad P'' = P + \delta P'', \quad P''' = P + \delta P''', \text{ etc.},$$
$$N' = N + \delta N', \quad N'' = N + \delta N'', \quad N''' = N + \delta N''', \text{ etc.},$$
$$D' = D + \delta D', \quad D'' = D + \delta D'', \quad D''' = D + \delta D''', \text{ etc.}$$

Supposons en outre n observations successives et non interrompues, et représentons par N_m l'angle moyen déduit de ces observations; on aura évidemment

$$N_m = \frac{N' + N'' + N''' + \ldots}{n} = \frac{\Sigma(N + \delta N)}{n} = \frac{\Sigma N}{n} + \frac{\Sigma \delta N}{n} = N + \frac{\Sigma \delta N}{n},$$

Σ désignant une somme; par conséquent

$$(7) \qquad N_m = N + \frac{\Sigma \delta N}{n} = N + \frac{dN}{dP} \cdot \frac{\Sigma \delta P}{n} + \frac{d^2N}{dP^2} \cdot \frac{\Sigma \delta P^2}{2.n} + \frac{dN}{dD} \cdot \frac{\Sigma \delta D}{n}$$
$$+ \frac{d^2N}{dD^2} \cdot \frac{\Sigma \delta D^2}{2.n} + \frac{d^2N}{dPdD} \cdot \frac{\Sigma \delta P \delta D}{n} + \text{etc.}$$

Telle est la valeur générale de l'angle moyen observé, donnée en fonction de la distance zénitale N correspondante à l'angle horaire P auquel toutes les observations sont rapportées. Cette valeur se simplifie beaucoup lorsqu'on prend pour P l'angle horaire moyen, c'est-à-dire, lorsqu'on fait $P = \frac{P' + P'' + P''' + \ldots}{n}$, parce qu'alors $\frac{\Sigma \delta P}{n}$ est nécessairement nulle, et le terme du troisième ordre ou celui qui a pour facteur δP^3 est d'une extrême petitesse. De plus, comme dans l'intervalle d'une demi-heure la déclinaison du soleil varie, à très peu prés, proportionnellement au temps, on a également $\frac{\Sigma \delta D}{n} = 0$, puisque si dans la première moitié de la série les différences δD sont positives, elles se trouvent nécessairement négatives dans l'autre moitié, et *vice versâ;* ainsi dans ce cas la formule précédente se réduit à celle-ci :

$$(8) \qquad N_m = N + \frac{d^2N}{dP^2} \cdot \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''} + \frac{d^2N}{dD^2} \cdot \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta D}{n . \sin 1''}$$
$$+ \frac{d^2N}{dPdD} \cdot \Sigma \frac{15 dP \sin 1'' . \delta D}{n} + \ldots$$

en exprimant les angles horaires, δP en secondes de temps, et les

variations δD en secondes de degré, et remarquant que l'on a sensiblement $\frac{1}{2}\delta P^2 = 2\sin^2 \frac{1}{2}\delta P$.

L'exacte application de ces deux dernières formules exige que l'on ne se méprenne point sur le signe qui doit affecter chacune des variations δP et δD. Par exemple, dans la première moitié de la durée des observations censées faites après midi, les δP sont négatives, et dans la seconde moitié de cette durée, ces variations sont positives, parce que les distances zénitales qui précèdent et suivent celle N sont respectivement plus faibles et plus fortes que celle-ci. D'un autre côté, si les déclinaisons D', D'', D'''..., vont en croissant, et que la déclinaison D soit celle qui correspond à l'angle horaire moyen P, les variations δD seront négatives avant l'époque moyenne, et positives après. Ce serait évidemment le contraire si ces déclinaisons allaient en diminuant.

On sait que les différences δP s'obtiennent sur-le-champ, en ôtant des temps observés de la pendule l'époque moyenne. Quant aux différences δD, on les déduira des angles horaires δP, c'est-à-dire qu'on multipliera la variation en déclinaison pour une minute de temps, prise dans une Éphéméride, par chaque valeur de δP exprimée en minutes. En ayant égard à ces considérations et à ce que la plus grande valeur que peut acquérir le facteur qui multiplie $\Sigma\delta P\delta D$ dans la formule (7) a lieu lorsque la déclinaison du soleil est australe, parce qu'alors sin D est négatif, on sera en droit de conclure que dans ce cas même, qui est le plus défavorable, les termes du second ordre dus au changement de déclinaison sont réellement insensibles : aussi voilà pourquoi M. Soldner a supposé tout d'abord la déclinaison constante. Cependant, nous avons jugé convenable non-seulement de mettre en évidence les deux termes dont il s'agit, afin que l'on pût s'assurer qu'ils sont assez petits pour être négligés sans aucun inconvénient, mais encore d'exprimer les coefficiens différentiels indispensables en fonction des données primitives, afin d'éviter au calculateur tout embarras sur le choix des signes de cos Z et de cos S.

Il résulte de ces remarques, que la formule essentiellement nécessaire pour parvenir à évaluer rigoureusement et avec brièveté la

correction de la pendule, est, pour le soleil comme pour une étoile,

$$N = N_m + r - p - \frac{d^2N}{dP^2} \cdot \Sigma \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''}, \tag{9}$$

r désignant la réfraction et p la parallaxe de hauteur. Ainsi, avec cette valeur de N on déterminera l'angle horaire P par la méthode connue, et cet angle converti en temps sera le temps vrai correspondant à l'époque moyenne déduite des temps de la pendule. La différence de ces deux résultats sera la correction cherchée.

On pourrait encore calculer l'angle horaire P d'après la distance zénitale moyenne N_m observée, corrigée de la réfraction et de la parallaxe; mais cet angle devrait ensuite subir une correction dP qui serait donnée par la formule suivante,

$$dP = -\left(\cot P - \cot N \frac{dN}{dP}\right) \Sigma \cdot \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''} = \frac{\cos S \cos Z}{\sin P} \Sigma \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''},$$

ainsi qu'on peut aisément s'en assurer (*voyez* d'ailleurs *Géodésie*, T. II, p. 121).

La réfraction variant avec la distance zénitale, il importe cependant de savoir s'il ne faudrait pas aussi avoir égard au changement qu'elle éprouve pendant la durée des observations. Pour cet effet, soient N', N'', N'''..., les distances apparentes telles qu'elles auraient été observées aux époques des angles horaires P', P'', P'''... Soient en outre r', r'', r'''... les réfractions correspondantes; et représentons toujours par N la distance zénitale vraie relative à l'angle horaire moyen P; il est évident qu'on aura alors

$$N' + r' = N + \delta N', \quad N'' + r'' = N + \delta N'', \quad N''' + r''' = N + \delta N''', \text{ etc.};$$

et par conséquent

$$\frac{N' + N'' + N''' \ldots + r' + r'' + r''' \ldots}{n} = N + \Sigma \frac{\delta N}{n}.$$

Mais à cause de $\frac{N' + N'' + N''' + \ldots}{n} = N_m$, et de $r' = r + \delta r'$, $r'' = r + \delta r''$, $r''' = r + \delta r'''$, etc., lorsque r désigne la réfraction à la distance zénitale N, on a définitivement

$$N_m + r + \Sigma \frac{\delta r}{n} = N + \Sigma \frac{\delta N}{n},$$

ou bien

$$N = N_m + r + \Sigma \frac{\delta r}{n} - \Sigma \frac{\delta N}{n}.$$

On évaluerait assez exactement le terme $\Sigma \frac{\delta r}{n}$ en calculant les réfractions qui ont lieu pour les distances zénitales correspondantes au milieu de chaque demi-intervalle; mais comme ces réfractions soustraites de r donneraient deux variations δr de signes contraires, dont la somme algébrique devrait être divisée par deux, il est indubitable que la correction de réfraction $\Sigma \frac{\delta r}{n}$ serait extrêmement petite et de l'ordre des quantités tout-à-fait négligeables, si l'astre était à plus de 20 degrés au-dessus de l'horizon, et qu'on n'étendît pas les observations au-delà d'une demi-heure.

APPLICATION.

3. Je choisirai pour exemple une des séries de distances zénitales du centre du soleil, que j'ai prises dernièrement avec un très bon cercle de Reichenbach, à niveau mobile, dans un lieu dont la latitude déduite d'opérations géodésiques, est de $48°26'10'' = H$, et la longitude ouest de 42^s de temps.

Observations du soir, le 10 *août* 1822.

TEMPS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLES MULTIPLES.	ANGLES SIMPLES.	ÉTAT DE L'ATMOSPHÈRE.
$4^h\ 5'39''2$	départ, $512^G,870$		Peu de vent.
6.54,4			Nuages par intervall.
8,48,2			
9.54,4			Barom. $= 0^m,7557$
11.10,0			
13.44,4	$918^G,716$	$60°52'36'',8$	Thermomètre libre
16.27,4			à l'ombre $= 24°,5$
17.46,2			
19. 9,6			
20.56,2			
22.21,8			
$n = 12.$ 23.24,4	$1336^G,205$	$61°45'\ 0'',45$	
époque moy. $4^h14'41^s33$			

De là l'angle observé déduit de 12 observat., $N_n = 61°45'\ 0''45$
réfraction . . . . $+\ 1.41,83$
parallaxe . . . . $-\ 7,58$
distance zénitale géocentrique. . . . $N_1 = 61°46'34''70$

Avant d'appliquer à cette distance la correction

$$-\Sigma \frac{\delta N}{n} = -\frac{d^2N}{dP^2} \cdot \Sigma \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n.\sin 1''},$$

on formera le tableau suivant.

TEMPS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLES HORAIRES δP.	FACTEURS $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{\sin 1''}$.
4h 5'39"	— 9' 2"	160,2
6.54	7.47	118,9
8.48	5.53	68,0
9.54	4.47	44,9
11.10	3.31	24,3
13.44	0.57	1,8
16.27	+ 1.46	6,1
17.46	3. 5	18,7
19.10	4.29	39,5
20.56	6.15	76,7
22.22	7.41	115,9
23.24	8.43	149,2
époque moyenne, 4h 14' 41"	Somme. . . .	$824,2 = \Sigma \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{\sin 1''}$

Dans ce tableau, la somme des δP négatifs diffère de 2" de celle des δP positifs, parce qu'on a négligé les fractions de seconde qui ne sont ici d'aucune importance; et les facteurs correspondans à ces angles horaires ont été trouvés à l'aide d'une table de réduction au méridien, c'est-à-dire de celle XVIII du *Traité de Géodésie*, T. II.

Il reste encore, pour pouvoir évaluer les coefficiens différentiels $\frac{dN}{dP}$, $\frac{d^2N}{dP^2}$, à déterminer approximativement l'angle horaire moyen P, et à calculer la déclinaison correspondante du soleil. Or, on savait

déjà que le chronomètre retardait à peu près de 4′43″ sur le temps vrai, partant

$$
\begin{array}{ll}
\text{époque moyenne.........} & = 4^h\,14'\,41''3 \\
\text{retard approché.........} & + \quad 4.43 \\
\text{angle horaire approché...} & P = 4^h\,19'\,24'' = 64^\circ 51'.
\end{array}
$$

Calculant donc la déclinaison du soleil pour cette heure-là, à l'aide de la *Connaissance des Tems,* et tenant compte des différences secondes (art. 241, *Géodésie*), on obtiendra $D = 15^\circ 38' 18'',9$.

Maintenant, si l'on prend pour valeur de N celle de l'angle moyen N_1 qui en diffère fort peu, on aura, en procédant par les logarithmes à 5 décimales,

$$
\begin{array}{rl}
\sin P = & 9{,}95674 \\
\cos H = & 9{,}82181 \\
\cos D = & 9{,}98361 \\
\text{C. } \sin N_1 = & \underline{0{,}05498}
\end{array}
$$

$$
\log \frac{dN}{dP} = 9{,}81714 + ; \quad \log \frac{dN^2}{dP^2} = 9{,}63428 -
$$

$$
\cot P = 9{,}67163 \qquad \cot N_1 = \underline{9{,}72978}
$$

$$
9{,}36406 -
$$

$$
\left.
\begin{array}{r}
\log \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{\sin 1''} = 2{,}91603 \\
\text{C. } \log 12 = \underline{8{,}92082}
\end{array}
\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad
\begin{array}{l}
\underline{1{,}83685} \\
1{,}20091 -
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
1{,}32562 + & \\
= + 21''17 & = - 15'',88 \\
\underline{- 15{,}88} &
\end{array}
$$

$$
\text{correction } \Sigma \frac{\delta N}{n} = + \ 5''29
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{distance zénitale géocentrique} & = 61^\circ\,46'\,34''70 \\
\text{correction.....................} & \underline{\quad - \ 5{,}29} \\
\text{distance zénitale correspon-} & \\
\quad \text{dante à l'angle horaire P;} & N = 61^\circ\,46'\,29''41.
\end{array}
$$

Pour déterminer rigoureusement cet angle horaire, on procédera

ainsi qu'il suit :

N = 61° 46′ 29″41
colatitude C = 41.33.50
distance polaire Δ = 74.21.41,10

somme 177.42. 0,51
demi-somme 88.51. 0,25 .... 88° 51′ 0″25
N = 41.33.50 Δ = 74.21.41,10
R = 47.17.10,25 R′ = 14.29.19,15

sin R = 9,8661402
sin R′ = 9,3982671
C. sin C = 0,1781887
C. sin Δ = 0,0163822

19,4589782
sin ½ P = 9,7294891 = 32° 26′ 20″,1.

P = 64° 52′ 40″2

temps vrai = 4h 19′ 30″66 temps vrai = 4h 19′ 30″66
temps du chron. = 4.14.41,33 équat. du temps = + 5. 5,08
retard absolu = + 4′ 49″33 temps moyen = 4h 24′ 35″74
temps du chronom. 4.14.41,33
retard absolu = + 9′ 54″41

Si l'on eût calculé l'angle horaire P en négligeant la correction de distance zénitale = − 5″,29, on aurait trouvé

P = 64° 52′ 48″ = 4h 19′ 31″,2,

et partant, l'erreur sur le retard absolu aurait été de 0″,54.

Les observations de distances zénitales faites ainsi pendant plusieurs jours de suite, et soumises au calcul précédent, feront connaître exactement la marche diurne de la pendule et le temps absolu; elles suppléeront avec avantage à celles qu'on fait ordinairement dans le même but avec la lunette méridienne, lorsqu'il sera impossible d'employer cet instrument; et elles pourront, sans inconvénient, se grouper de 20 en 20 comme nous avons réuni en une seule série les douze observations qui viennent de nous servir d'exemple.

Si l'on partageait notre série en deux, de six observations chacune, les données relatives à la première série partielle seraient, d'après le premier tableau ci-dessus,

$$N_m + r - p = 60^\circ 54' 7'',4 ;$$

époque moyenne au chronomètre, $4^h 9' 21'',8$,

déclinaison du soleil......... $D = 15^\circ 38' 23''$,
distance polaire............ $\Delta = 74.21.37$;

et les données relatives à la deuxième série partielle seraient

$$N_m + r' - p' = 62^\circ 39' 2'',05,$$

époque moyenne au chronomètre, $= 4^h 20' 1'',0$,

déclinaison du soleil........ $D' = 15^\circ 38' 14''$,
distance polaire............ $\Delta' = 74.21.46$;

enfin pour tous deux on aurait

$$H = 48^\circ 26' 10'' \quad \text{et} \quad \text{colatitude } C = 41^\circ 33' 50''.$$

De là on déduirait, par la méthode ordinaire, les deux angles horaires P et P', et l'on trouverait

	$P = 63^\circ 32' 52''$		$P' = 66^\circ 12' 30''$
temps vrai......	$4^h 14' 11'',46$	temps vrai......	$4^h 24' 50''$
chronomètre....	4. 9.21,80	chronomètre....	4.20. 1
retard.........	$4' 49'',66$	retard.........	$4' 49''$.

Par un milieu.......... retard $= 4' 49'',33$ comme ci-dessus.

On voit donc par ce calcul que si le temps ne permettait pas de prolonger une série au-delà de 6 observations, il serait inutile de faire usage de notre méthode de correction; mais, dans le cas contraire, cette méthode diminuera souvent les opérations numériques et fournira toujours des résultats d'une grande précision.

Avant de passer à une autre matière, reconnaissons par le fait que la variation de déclinaison n'a aucune influence sensible sur la correction de la pendule. D'abord, les relations (3) et (4) étant

soumises au calcul logarithmique, on a

$$\left.\begin{aligned} \sin P &= 9{,}95674 \\ C.\sin N &= 0{,}05498 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 0{,}01172$$

$$\cos H = \underline{9{,}82181} \qquad \cos D = \underline{9{,}98361}$$

$$\sin S = 9{,}83353 \qquad \sin Z = 9{,}99533.$$

Dans notre climat, l'angle S est aigu, et à l'heure de l'observation l'azimut Z du soleil, compté du nord à l'ouest, était obtus (*Géodésie*, T. II, p. 120); mais nous n'avons besoin que de l'angle S pour déterminer les coefficiens différentiels $\frac{dN}{dD}$, $\frac{d^2N}{dD^2}$, $\frac{d^2N}{dPdD}$.

En effet, dans le cas le plus défavorable soit $\delta P = 20' = 1200''$ de temps, et $\delta D = 15''$ de degré; on aura, d'après le n° 2,

$$\begin{aligned} \text{l.}\cot N &= 9{,}72978 \\ \sin S &= 9{,}83353 \\ & \underline{9{,}83353} \\ \log\frac{d^2N}{dD^2} &= 9{,}39684 \\ \log\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta D}{\sin 1''} &= \underline{6{,}73672} \\ 6{,}13356 &= 0'',00014 = \frac{d^2N}{dD^2}\cdot\frac{\delta D^2}{2}\cdot \end{aligned}$$

Ce terme, qui est le plus grand de tous ceux de même espèce, est donc tout-à-fait insensible.

D'un autre côté, si l'on fait $\delta P_{,} = 15\sin 1''.\ \delta P$, on aura

$$\begin{aligned} \log 15 &= 1{,}17609 & \cot N &= 9{,}72978 \\ \sin 1'' &= 4{,}68557 & \sin S &= 9{,}83353 \\ \log \delta P &= \underline{3{,}07918} & \cos S &= 9{,}86434 \\ \log \delta P_{,} &= 8{,}94084 & \cos D &= 9{,}98361 \\ \log \delta D &= 1{,}17609 & \log \delta P_{,} &= 8{,}94084 \\ \sin S &= 9{,}83353 & \log \delta D &= \underline{1{,}17609} \\ \sin D &= \underline{9{,}43067} & & 9{,}52819 + \\ & 9{,}58113 - & &= +0'',33 \\ &= -0'',24 & & \underline{-0'',24} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2N}{dPdD}\cdot\delta P\delta D = +0'',09;$$

terme encore le plus grand parmi tous ses semblables, et qui, vu sa petitesse, n'est d'aucune considération.

Le célèbre Delambre a reconnu lui-même (*Connaissance des Tems* pour 1820) que le terme du troisième ordre dépendant des angles horaires δP est toujours insensible. On s'en assurerait très aisément en évaluant le coefficient différentiel $\frac{d^3N}{dP^3}$, dont nous avons donné l'expression sous une forme très simple (nº précédent).

§ II.

Nouveau moyen de déterminer la latitude géographique par la polaire, observée à un point quelconque de son parallèle.

4. La méthode la plus générale, la plus simple et la plus exacte pour déterminer la latitude d'un lieu de la terre, est sans contredit celle des passages supérieurs et inférieurs des astres au méridien. Cependant on obtient encore cet élément géographique avec beaucoup de précision par des distances zénitales de la polaire, prises vers les époques de sa plus grande digression orientale et occidentale; parce qu'il ne reste plus maintenant aucune incertitude sur sa déclinaison. M. Littrow, l'un des astronomes les plus distingués de Vienne, a même proposé d'observer cet astre à un point quelconque de son parallèle et donné une formule qui s'adapte à ce cas général; mais cette formule et la table qui y est relative seraient d'une application si longue et si fastidieuse pour tirer parti de toutes les distances zénitales mesurées au cercle répétiteur et groupées en très petit nombre, qu'il m'a paru utile, pour éviter cet inconvénient, de chercher à rendre le calcul actuel analogue à celui des passages au méridien, c'est-à-dire de déduire la latitude moyenne de l'ensemble même des observations.

Soient Z, P, E, le zénit, le pôle et le lieu de l'étoile; H la latitude cherchée, C son complément; Δ la distance de l'étoile au pôle; N la distance zénitale vraie, correspondante à l'angle horaire P intermédiaire entre le plus grand et le plus petit de ceux observés.

Soient en outre N', N'', N'''... les n distances zénitales correspondantes aux n angles horaires P', P'', P'''... conclus des temps de la

pendule et de l'heure du passage de l'étoile au méridien; enfin $C = N + u$.

Cela posé, le triangle sphérique ZPE donne

$$(1)\qquad \cos N = \cos(N+u)\cos\Delta + \sin(N+u)\sin\Delta\cos P:$$

formule d'où l'on pourrait tirer la valeur de $N+u$ par le procédé relatif au 5[e] cas des triangles sphériques (art. 84, *Géodésie*, T. I); c'est même ce qu'il y aurait de plus simple à faire sans la petitesse de Δ, et si l'on n'avait qu'une valeur de N; mais dans l'hypothèse actuelle il vaut beaucoup mieux chercher à exprimer u en série qui procède suivant les puissances de la petite distance polaire Δ. Faisons donc, puisque u serait nulle si l'on avait $\Delta = 0$,

$$(2)\qquad u = \alpha\Delta + \beta\Delta^2 + \gamma\Delta^3 + \ldots$$

et déterminons les coefficiens α, β, γ.... par la méthode de l'art. 99 de la *Géodésie*.

D'abord, en développant $\cos(N+u)$ et $\sin(N+u)$, et divisant tout par $\cos N$, il vient

$$(3)\qquad 1 = \sin u(\sin\Delta\cos P - \operatorname{tang} N\cos\Delta) + \cos u(\cos\Delta + \operatorname{tang} N\sin\Delta\cos P);$$

et à cause de

$$\sin\Delta = \Delta - \tfrac{1}{6}\Delta^3,\quad \cos\Delta = 1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2,$$

on a, en bornant les développemens aux 3[es] puissances de Δ,

$$\sin\Delta\cos P - \operatorname{tang} N\cos\Delta = -\operatorname{tang} N + \Delta\cos P - \tfrac{1}{2}\Delta^2\operatorname{tang} N - \tfrac{1}{6}\Delta^3\cos P,$$
$$\cos\Delta + \operatorname{tang} N\sin\Delta\cos P = 1 + \Delta\operatorname{tang} N\cos P - \tfrac{1}{2}\Delta^2 - \tfrac{1}{6}\Delta^3\operatorname{tang} N\cos P;$$

D'un autre côté, de la série hypothétique (2) l'on tire

$$\sin u = \alpha\Delta + \beta\Delta^2 + (\gamma - \tfrac{1}{6}\alpha^3)\Delta^3,$$
$$\cos u = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\Delta^2 - \alpha\beta\Delta^3;$$

si donc l'on substitue ces valeurs dans l'équation (3), et qu'on ordonne relativement à Δ, il viendra, en comparant les termes semblables,

$$\alpha = \cos P,\quad \beta = -\tfrac{1}{2}\cot N\sin^2 P,\quad \gamma = \tfrac{1}{3}\sin^2 P\cos P,$$

et définitivement

(4) $$u = \Delta \cos P - \tfrac{1}{2}\Delta^2 \sin^2 P \cot N + \tfrac{1}{3}\Delta^3 \sin^2 P \cos P.$$

Telle est la formule qui sert de fondement à la méthode de M. Littrow; et d'après laquelle

(5) $$H = (90° - N - \Delta) + 2\Delta \sin^2 \tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2}\Delta^2 \sin 1'' \sin^2 P \cot N - \tfrac{1}{3}\Delta^3 \sin^2 1'' \sin^2 P \cos P,$$

ou pour abréger,

(6) $$H = (90° - N - \Delta) + x,$$

en représentant par x tous les termes en P.

Maintenant, si l'on forme les différences

$$P' - P = \delta P', \quad P'' - P = \delta P'', \quad P''' - P = \delta P''', \text{ etc.,}$$
$$N' - N = \delta N', \quad N'' - N = \delta N'', \quad N''' - N = \delta N''', \text{ etc.,}$$

et qu'on désigne par $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta x'''$,.. les différens accroissemens que reçoit x lorsque P devient successivement P', P'', P'''..., on aura évidemment

$$H = 90° - (N + \delta N') - \Delta + x + \delta x',$$
$$H = 90° - (N + \delta N'') - \Delta + x + \delta x'',$$
. . . .

et par conséquent la moyenne de toutes ces valeurs, en la représentant par H_m, sera, Σ étant toujours le signe d'une somme,

$$H_m = 90° - N - \Sigma \frac{\delta N}{n} - \Delta + x + \Sigma \frac{\delta x}{n}.$$

Il n'est pas moins évident que la relation (6) donne

$$\Sigma \frac{\delta N}{n} = \Sigma \frac{\delta x}{n}.$$

Mais, par ce qui précède,

(7) $$x = 2\Delta \sin^2 \tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2}\Delta^2 \sin^2 P \cot N - \tfrac{1}{3}\Delta^3 \sin^2 P \cos P;$$

et puisque par le théorème de Taylor on a généralement, lorsque x est considéré comme une fonction de P et de N,

$$\delta x = \frac{dx}{dP}.\delta P + \frac{d^2x}{dP^2}.\frac{\delta P^2}{2} + \frac{dx}{dN}.\delta N + \text{etc.},$$

l'équation (7) donnera, par des différentiations successives,

$$\frac{dx}{dP} = \Delta \sin P + \tfrac{1}{2}\Delta^2 \sin 2P \cot N \ldots\ldots = Q,$$

$$\frac{d^2x}{dP^2} = \Delta \cos P + \Delta^2 \cos 2P \cot N \ldots\ldots = R,$$

$$\frac{dx}{dN} = -\tfrac{1}{2}\Delta^2 \frac{\sin^2 P}{\sin N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T,$$

. . . .

Ainsi, en exprimant δP en secondes de temps, et δN en secondes de degré, et faisant attention que δN est toujours beaucoup plus petit que $15\delta P$, la valeur de δx sera de cette forme

$$\delta x = 15Q.\delta P + R.\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{\sin 1''} + T.\delta N;$$

on aura pareillement

$$\delta x' = 15Q.\delta P' + R.\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P'}{\sin 1''} + T.\delta N',$$

. . . .

puisque les coefficiens différentiels Q, R, T sont constans et se rapportent à l'époque intermédiaire des observations. Si donc la somme algébrique des δx et des δN. . . est, comme à l'ordinaire, exprimée par le symbole $\Sigma\delta x$, $\Sigma\delta N$...., et que x_m soit la valeur moyenne $\frac{x'+x''+x'''+\ldots}{n} = \frac{(x+\delta x')+(x+\delta x'')+(x+\delta x''')+\text{etc.}}{n}$, on aura

$$(8) \qquad x_m = x + \Sigma\frac{\delta x}{n} = x + \frac{15}{n}Q.\Sigma\delta P + \frac{R}{n}.\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{\sin 1''} + \frac{T}{n}.\Sigma\delta N.$$

Mais cette formule est susceptible de simplification dans le cas particulier où l'angle horaire P est précisément le milieu entre tous ceux qui ont été observés, c'est-à-dire, lorsque $P = \frac{P'+P''+P'''+\ldots}{n}$,

car alors $\Sigma\frac{\delta P}{n}$ est nécessairement nulle, ou, ce qui est de même, $\frac{15}{n}Q.\Sigma\delta P=0$; et de plus, le terme $\frac{T}{n}.\Sigma\delta N$ peut être négligé dans la même circonstance. On a donc seulement, en rejetant les termes supérieurs au 4e ordre,

$$(9)\qquad x_m=x+(\sin\Delta\cos P+\sin^2\Delta\cos 2P\cot N).\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{n.\sin 1''}.$$

Enfin, si N_m désigne la distance zénitale moyenne observée et corrigée de la réfraction, auquel cas

$$N_m=\frac{N'+N''+N'''+\ldots}{n}=\Sigma\left(\frac{N+\delta N}{n}\right),$$

on aura pour la latitude moyenne cherchée,

$$(10)\qquad H_m=90^\circ-N_m-\Delta+x+\Sigma\frac{\delta x}{n}.$$

Lorsque l'étoile est très près du méridien, la variation δN est insensible; ainsi, en comptant les angles horaires δP à partir du méridien même, ce qui suppose $P=0$, on a $x=0$ et

$$(11)\qquad x_m=(\sin\Delta+\sin^2\Delta\cot N).\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{n.\sin 1''}.$$

Je pense qu'en modifiant de la sorte la méthode de calcul de M. Littrow, elle acquiert beaucoup de simplicité, et qu'en ayant égard aux considérations de la p. 588 du T. III de l'Astronomie de Delambre, elle est susceptible de toute la précision désirable. Néanmoins, les passages au méridien doivent procurer des résultats plus certains et moins dépendans de l'erreur commise sur l'angle horaire moyen P, par suite de la lenteur de la marche de l'étoile. C'est ce que prouve l'équation différentielle $dx=\Delta\sin P.dP$, déduite de la formule (7), et dans laquelle dP exprime l'erreur de l'angle horaire.

APPLICATION.

5. Quelques heures avant l'observation de la latitude par la polaire, faite le 13 août 1822, j'ai su par des distances zénitales

absolues du soleil que mon chronomètre, réglé sur le temps moyen, retardait de 9′51″,3; ce qui m'a mis à même de calculer les vingt observations suivantes.

TEMPS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLES horaires ∂P, temps moyen.	ANGLES horaires ∂P, temps sidéral.	Réductions à l'époque moyenne.	Autres élémens du calcul.
9h 0′ 29″ 6	15′ 33″ 5	15′ 36″	477″ 6	Distance zénitale
2. 2,6	14. 0,5	14. 3	387,5	moy. = 46G,23825.
3.57,4	12. 6,5	12. 8	289,0	= 41°36′ 51″ 93
5.49,8	10.13,5	10.15	206,3	réfract. + 50,31
7.32,4	8.31,5	8.33	143,5	
8.49,8	7.13,5	7.15	103,2	Nm = 41° 37′ 42″ 24
10.38,8	5.24,5	5.25	57,6	
11.32,4	4.31,5	4.32	40,3	*État de l'atmosph.*
12.53,4	3.10,6	3.11	19,9	Temps calme.
13.52,4	2.11,5	2.12	9,5	Ciel serein.
17.41,6	1.38,5	1.39	5,3	Barom. = 0m,759
19. 9,8	3. 6,5	3. 7	19,1	Therm. centigr. = + 17G,0
21. 9	5. 5,5	5. 6	51,1	
22. 2,4	5.58,5	5.59	70,3	
23.31,6	7.28,5	7.30	110,4	
24.51,8	8.48,5	8.50	153,2	dist. pol. appar.
26.41,6	10.38,5	10.40	233,4	Δ = 1°38′ 23″7
27.39	11.35,5	11.37	264,9	= 5903,7
29.47,4	13.43,5	13.46	372,0	Tem. moy. du pass.
n = 20. 30 58,2	14.54,5	14.57	438,7	= 15h 29′ 55″,5
époque moyenne. } = 9h 16′ 3″ 5		somme	= 3442,8	
		$\frac{1}{20^{ième}}$ ...	= 172,14 = $\Sigma \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \partial P}{n . \sin 1''}$ = F.	

Les nombres qui composent la deuxième colonne de ce tableau sont les différences des temps du chronomètre à celui qui se rapporte au milieu de l'intervalle. Ceux de la troisième colonne sont les valeurs des angles sidéraux correspondans aux angles moyens. On les aurait obtenus tout d'abord si le chronomètre eût été réglé sur le temps sidéral. Enfin les réductions à l'époque moyenne, formant la quatrième colonne, sont données par la table XVIII du

Traité de Géodésie, T. II, qui est la même dont on se sert pour les réductions au méridien, ainsi qu'on l'a déjà dit.

Il résulte de ce qui précède que

l'époque moyenne au chronomètre	$= 9^h 16' 3''5$
mais à cause du retard de . . .	$9.51,3$
l'heure du milieu de l'intervalle, temps moyen, est de.	$= 9^h 25' 54''8$
Laquelle étant ôtée de l'heure du passage supérieur au méridien. . .	$= 15.29.55,5$
on a pour l'angle horaire à l'est, temps moyen.	$P = 6.\ 4.\ 0,7$
ajoutant la réduction au temps sid.	$= +59,8$
il vient enfin pour l'angle horaire en temps sidéral.	$P = 6^h\ 5'\ 0''5$
et en degrés.	$P = 91^\circ 15'\ 7''.$

On procédera maintenant au calcul des formules (7) et (9) dans lesquelles $\Delta = 5903'',7$, $P = 91^\circ 15' 7''$, et où l'on peut faire $N = N_m = 41^\circ 37' 42'',24$.

Formule (7).

1er terme.	2e terme.	3e terme.
$\log 2 = 0,3010300$	$\log \Delta = 3,77112$	$\log \Delta = 3,77112-$
$\log \Delta = 3,7711243$	$\sin P = 9,99990$	$\cos P = 8,33943-$
$\sin \frac{1}{2} P = 9,8541773$	$l. \Delta \sin P = 3,77102$	$l. \Delta \cos P = 2,11055$
$9,8541773$	$3,77102$	$l. \Delta^2 \sin^2 P = 7,54204$
$3,7805089+$	$l. \frac{1}{2} \sin 1'' = 4,38454$	$l. \frac{1}{3} \sin 1'' = 8,89402$
$= 6032''660$	$\cot N = 0,05122$	$8,54661$
$+ 95,020$	$1,97780+$	$= +0''035$
$+ 0,035$	$= +95''02$	
$U = 6127,715$		
$-\Delta = -5903,700$		
$x = + 224,015$		

Formule (9).

$\log \Delta \cos P = 2,11055-$
$\sin 1'' = 4,68557$
$\log F = 2,23588$
$9,03200-$
$= -0''108$
$-0,158$
correction $\Sigma \frac{\delta x}{n} = -0''266$

$\log \Delta^2 = 7,54225$
$\cos 2P = 9,99958-$
$\cot N = 0,05122$
$\sin^2 1'' = 9,37114$
$\log F = 2,23588$
$9,20007-$
$= -0''158$

Formule (10).

$x = +224''016$
correction $\Sigma \frac{\delta x}{n} = -\ 0,266$
$x_m = +223,749 = +\ 0°\ 3'\ 43''75$
$90° - N_m = \quad 48.22.17,76$
latitude cherchée. . . . $H_m = \quad 48.26.\ 1,51.$

Dans le calcul de la position apparente de l'étoile, j'ai tenu compte de la nûtation solaire en déclinaison, qui est de 0'',4 (Note II); il convient d'y avoir égard quand on aspire à une grande précision (*).

6. Je ne rapporterai pas les autres observations semblables que j'ai faites au même lieu et qui s'accordent entre elles, pour la plupart, aussi bien qu'il est permis de le désirer; toutefois je vais faire voir que le résultat précédent est à très peu près confirmé par une observation du soleil.

(*) On aura soin de prendre, dans les formules (7, 9, 10, 11), la distance polaire Δ positivement ou négativement, selon que les angles horaires à l'est ou à l'ouest seront comptés des passages supérieurs ou inférieurs; mais si ces angles sont comptés constamment à partir du méridien supérieur et depuis 0 jusqu'à 360°, il suffira toujours d'avoir égard aux signes de sin P et de cos P dans les formules citées.

Distances méridiennes du centre du soleil,

Le 13 août 1822 (à Étampes).

En plein air.

TEMPS DU CHRONOMÈTRE.	PASSAGE. TEMPS de la PENDULE. 11h54′48″	ANGLES HORAIRES.	Réductions au méridien. TAB. XVIII, 1er terme. x	TAB. XIX, 2e terme. y
Bat. 11h37′ 25″ 4	11h37′ 27″	17′ 21″	−590″,0	+0″848
40.15.16	40.21	14.27	409,9	0,403
42.20. 4	42.22	12.26	303,5	0,223
44.15. 4	44.21	10.27	214,4	0,110
46.45.16	46.51	7.57	124,1	0,036
49. 5. 3	49. 6	5.42	63,8	0,010
51.20.15	51.26	3.22	22,3	0,001
52.35.13	52.40	2. 8	8,9	0,000
56.10. 4	56.12	1.24	3,8	0,000
58.40.17	58.47	3.59	31,1	0,002
59.55. 4	59.57	5. 9	52,1	0,006
12. 2.25.12	12. 2.30	7.42	116,4	0,032
4.40. 4	4.42	9.54	192,4	0,090
5.45.12	5.50	11. 2	239,0	0,138
6.50. 6	6.52	12. 4	285,8	0,200
7.40.22	7.49	13. 1	332,6	0,267
9.15. 4	9.17	14.29	411,7	0,412
10.20.12	10.25	15.37	478,7	0,551
12.45. 4	12.47	17.59	633,6	0,976
$n = 20$. 14.10.10	14.14	19.26	741,6	1,328
Baromètre = 0m,759 Therm. centig. = 25°,4	Nuages et vent chagrinant.	$nx = -5255'',7$; $ny = +5'',633$.		

Après la 20e observation, la lunette supérieure avait parcouru un arc de 749c,170; ainsi, l'angle mesuré = 37c,4585
= 33° 42′ 45″,54.

Dans ce tableau, les nombres de la 2e colonne sont la répétition de ceux de la première, qui se trouvent modifiés par la réduction en secondes des battemens du chronomètre, dont cinq valent deux secondes.

Le même jour de cette observation, des hauteurs du soleil m'ont appris qu'à six heures du matin le retard absolu du chronomètre était de 5′10″ : or, comme dans $14^h\frac{1}{2}$ ce chronomètre retardait de 5″ sur le temps vrai, il s'ensuit que le midi vrai au chronomètre a eu lieu à $11^h54'48''$. De là j'ai pu former les 3e et 4e colonnes.

Maintenant, si l'on désigne par m et s la somme des angles horaires avant et après midi, on aura

$$m = 73'50'', \quad s = 131'46'',$$

$$\text{angle horaire moyen} = \frac{s-m}{20} = \frac{57'56''}{20} = \frac{57',9}{20} = 2',895\,;$$

et comme le mouvement en déclinaison pour 1′ est de 0″,75, la correction de déclinaison δD sera (art. 318, *Géodésie*, T. II),

$$\delta D = 2,895 \times 0'',75 = -\ 2''175$$

On a de plus, en vertu des données précédentes,

réfraction.	$= + 36,64$
parallaxe.	$= - \ \ 4,69$
réfraction — parallaxe $=$	$31,95$

$$\text{retard diurne du chronomètre. . .}\ \rho = 8''$$

$$\text{par suite. . . . .}\ \rho' = \frac{\rho}{86400-\rho} \doteq 0{,}0000093$$

$$\text{facteur. . . . .}\ 1 + 2\rho' = 1{,}000186$$

$$\log(1 + 2\rho') = 0{,}0000881.$$

Enfin, on trouve que la déclinaison du soleil à midi, dans le lieu dont la longitude occidentale $= 42''$ en temps, est $D = 14°47'52''66$ et puisque la latitude estimée. . . . . H $=$ 48.26.10 on a (art. 318, *Géodésie*, T. II)

	1er terme.	2e terme.
H=48° 26′ 10″	log nx = 3,7206306—	l. cos D = 9,98535
D = 14.47.52	C. log 20 = 8,6989700	l. cos H = 9,82181
H—D = 33.38.18	cos H = 9,8218113	l. (1+2ρ′) = 0,00009
	cos D = 9,9853518	C. sin (H—D) = 0,25653
	log (1+2ρ′) = 0,0000881	= 0,06378
		0,06378
	C. sin (H—D) = 0,2565304	l. cot (H—D) = 0,17693
	log 1er terme = 2,4833822—	0,30449
1er terme = — 304″36 = — 5′ 4″36		log ny = 0,75074+
2e terme. . . . . . . = + 0,57		C. log 20 = 8,69897
réduction au méridien = — 5′ 3″79		log 2e terme = 9,75420+

RÉCAPITULATION.

distance observée.		33° 42′ 45″54
réfraction — parallaxe. . .	+	31,95
réduction au méridien. . .	—	5. 3,79
correction de déclinaison. .	—	2,17
distance méridienne. . . .	=	33° 38′ 11,53
déclinaison du soleil. . . .	D =	14.47.52,66
latitude cherchée. . . .	H_m =	48.26. 4,19
ci-dessus par la polaire. . .		48,26. 1,51
différence.		2″68

7. L'observation précédente de la polaire ayant été faite à l'époque de la plus grande digression orientale, la méthode décrite à l'art. 320 du T. II de la *Géodésie*, et due à Delambre, serait applicable. En effet, à l'époque dont il s'agit, l'angle horaire, P_1, est donné par la formule $\cos P_1 = \tang \Delta \cot C$; et comme la colatitude C = 41°33′50″ à très peu près, on trouvera aisément P_1 = 88° 8′59″,08, ou bien en

temps sidéral.	$P_1 = 5^h\,52'\,35''9$
ôtant la réduction au temps moyen.	$-\ 57,4$
on a angle horaire, temps moyen, à l'instant de la plus grande digression.	$P_1 = 5.51.38,5$
mais le temps du passage au méridien est. . .	$15.29.55,5$
donc le temps moyen de la digression. . . .	$= 9.38.17,0$
ôtant le retard du chronomètre.	$9.51,3$
on a enfin l'heure de la plus grande digression en temps moyen du chronomètre.	$= 9^h\,28'\,25''7$

Maintenant, si de cette heure de la plus grande digression on ôte les temps de la pendule, on aura les angles horaires que nous avons désignés par θ dans l'ouvrage cité; lesquels seront ici exprimés en temps moyen, puisque le chronomètre est réglé sur ce temps. Il faudra donc réduire ces angles en temps sidéral; après quoi l'on cherchera la correction de distance zénitale observée, par cette formule

$$\Sigma\frac{\delta N}{n} = \sin\Delta\,.\,\Sigma\frac{\theta''}{n} - \frac{1}{6}\sin\Delta\cos^2\Delta\sin^2 1''.\,\Sigma\frac{\theta''^3}{n},$$

dans laquelle les angles θ sont exprimés en secondes.

Ayant obtenu de la sorte $N = N_m + \Sigma\frac{\delta N}{n}$, c'est-à-dire la distance zénitale moyenne vraie correspondante à l'heure exacte de la digression, il ne restera plus qu'à résoudre l'équation

$$\cos C = \cos N \cos\Delta;$$

ou plutôt, qu'à trouver l'excès y sur N, donné par la série

$$y = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta\cot N - 2\sin^4\tfrac{1}{2}\Delta\cot^3 N.$$

Mais cette méthode de calcul, seulement propre au cas particulier que l'on considère maintenant, est certainement beaucoup plus longue et moins directe que celle qu'on vient de décrire. On voit bien que pour l'abréger il faudrait construire une table des facteurs $\frac{1}{6}\theta^3 = \frac{4}{3}\frac{\sin^3\frac{1}{2}\theta^3}{\sin 1''}$.

§ III.

Détermination des azimuts terrestres par les observations du soleil et de la polaire.

8. On oriente un réseau trigonométrique en déterminant par des observations astronomiques l'angle qu'un de ses côtés fait avec la méridienne qui passe par l'une de ses extrémités. Par exemple, la comparaison d'un objet terrestre avec le soleil, pris à l'époque de son lever ou de son coucher, est très propre à faire connaître cet azimut. Comme l'arc de distance qui résulte de cette comparaison, lorsqu'il est observé avec un bon théodolite répétiteur, peut être mesuré un très grand nombre de fois dans un espace de temps assez court, on partage ordinairement la série totale en séries partielles de quatre observations chacune, et pour lors la moyenne arithmétique de tous les azimuts calculés en particulier est le résultat définitif. Mais au lieu de procéder longuement et péniblement de la sorte, il est bien plus simple et même plus exact d'appliquer la méthode précédente au cas actuel, c'est-à-dire d'évaluer la correction à faire à l'azimut du soleil, calculé pour l'époque moyenne de la durée des observations, afin que cet azimut corresponde précisément à l'arc moyen de distance observé. Éclaircissons ce que ceci peut avoir d'obscur, et pour cet effet,

Soient A et z l'azimut d'un objet terrestre R et celui du soleil S au moment de son coucher, comptés l'un et l'autre du sud à l'ouest; g l'arc de distance horizontal; P l'angle horaire à la même époque, en sorte qu'on ait

$$A = z - g.$$

Cela posé, si z', z'', z'''.... et g', g'', g'''... sont les azimuts et les arcs de distance horizontaux correspondans aux angles horaires P', P'', P'''..., on aura pareillement

$$A = z' - g', \quad A = z'' - g'', \quad A = z''' - g''', \quad \text{etc.},$$

et pour l'azimut moyen A_m, déduit de l'ensemble de n observations,

$$A_m = \frac{(z' + z'' + z''' + \ldots) - (g' + g'' + g''' + \ldots)}{n};$$

ou bien si l'on fait

$$z'=z+\delta z',\quad z''=z+\delta z'',\quad z'''=z+\delta z''',\quad \text{etc.},$$
$$g'=g+\delta g',\quad g''=g+\delta g'',\quad g'''=g+\delta g''',\quad \text{etc.},$$

en même temps que l'on a

$$P'=P+\delta P',\quad P''=P+\delta P'',\quad P'''=P+\delta P''',\quad \text{etc.},$$

et que Σ soit le symbole d'une somme, on aura évidemment

$$A_m=z+\Sigma\frac{\delta z}{n}-\left(g+\Sigma\frac{\delta g}{n}\right)=z+\Sigma\frac{\delta z}{n}-g_m,$$

g_m étant l'arc moyen de distance observé.

L'azimut z correspondant à l'angle horaire P doit donc en général être augmenté de $\Sigma\frac{\delta z}{n}$; et puisqu'il est fonction de P et de la distance polaire Δ supposée variable, on a, par le théorème de Taylor,

$$(1)\qquad \Sigma\frac{\delta z}{n}=\frac{dz}{dP}.\Sigma\frac{\delta P}{n}+\frac{d^2z}{dP^2}.\Sigma\frac{\delta P^2}{2.n}+\frac{dz}{d\Delta}.\Sigma\frac{\delta\Delta}{n}+\frac{d^2z}{d\Delta^2}.\Sigma\frac{\delta\Delta^2}{2.n}+\frac{d^2z}{dPd\Delta}.\Sigma\frac{\delta P\delta\Delta}{n}+\text{etc.}$$

Le moyen d'obtenir facilement les valeurs des coefficiens différentiels de cette série est de recourir à la formule connue

$$(2)\qquad \tang z=-\frac{\sin P}{\cot\Delta\sin C-\cos P\cos C},$$

que fournit le triangle sphérique ZSP, dans lequel ZP$=90-$H$=$C, SP$=90-$D$=\Delta$, et l'angle de ces deux côtés $=$P.

Ainsi, en différenciant successivement par rapport à P et à Δ, on trouvera à l'aide de quelques artifices de calcul, et en se rappelant la signification donnée précédemment à l'angle S,

$$(\alpha)\qquad \frac{dz}{dP}=\cot P\sin z\cos z+\sin^2 z\cos C=\frac{\sin z\cos S}{\sin P},$$

$$(\beta)\qquad \frac{d^2z}{dP^2}=-\frac{1}{2}\frac{\sin 2z}{\sin^2 P}+2\cot z.\left(\frac{dz}{dP}\right)^2-\cot P.\frac{dz}{dP},$$

$$\frac{d^3z}{dP^3} = \frac{\cot P \sin 2z}{\sin^2 P} + \frac{2\sin^2 z}{\sin^2 P} \cdot \frac{dz}{dP} + \left(4\cot z . \frac{dz}{dP} - \cot P\right) . \frac{d^2z}{dP^2} - \frac{2}{\sin^2 z}\left(\frac{dz}{dP}\right)^3,$$

. . . .

$$\frac{dz}{d\Delta} = - \frac{\sin^2 z \sin C}{\sin P \sin^2 \Delta},$$

$$\frac{d^2z}{d\Delta^2} = 2\cot z . \left(\frac{dz}{d\Delta}\right)^2 - 2\cot \Delta . \frac{dz}{d\Delta},$$

$$\frac{d^2z}{dP d\Delta} = 2\cot z . \frac{dz}{dP} . \frac{dz}{d\Delta} - \cot P . \frac{dz}{d\Delta},$$

. . . .

Lorsque dans la série (1) l'on rapporte tout au milieu de l'intervalle, les facteurs $\Sigma\delta P$ et $\Sigma\delta\Delta$ deviennent nuls (n° 2); et même, à cause de l'extrême petitesse des termes dépendans de la variation de déclinaison, on a simplement

$$(3) \qquad A_m = z + \frac{d^2z}{dP^2} . \Sigma \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\delta P}{n . \sin 1''} - g_m;$$

formule applicable à un astre quelconque, et qui suppose l'emploi du théodolite répétiteur. Mais, si au lieu de cet instrument on faisait usage du cercle ordinaire de Borda, dont le limbe est constamment et diversement incliné à l'horizon, les arcs de distance g', g'', g'''... seraient les projections horizontales de ceux G', G'', G'''... observés: alors toute la difficulté consisterait, pour appliquer la formule (3) à la détermination des azimuts, à obtenir l'arc moyen horizontal g_m à l'aide des arcs de distance G', G'', G'''... mesurés successivement dans le cours de la série totale représentée par G_m. Passons donc à la discussion de ce cas général.

9. Si l'on représente respectivement par ρ', ρ'', ρ'''... les réductions à l'horizon des angles G', G'', G'''..., on aura

$$g' = G' - \rho', \quad g'' = G'' - \rho'', \quad g''' = G''' - \rho''', \quad \text{etc.},$$

ou faisant

$$\rho' = \rho + \delta\rho', \quad \rho'' = \rho + \delta\rho'', \quad \rho''' = \rho + \delta\rho''', \quad \text{etc.},$$

4..

ρ étant la réduction à l'horizon qui convient à l'arc de distance G et au milieu de l'intervalle représenté par l'angle horaire P ; on aura encore

$$(A) \quad A_m = \frac{z'+z''+z'''+\ldots}{n} - \frac{(G'+G''+G'''+\ldots)}{n} + \frac{\rho'+\rho''+\rho'''+\ldots}{n}$$
$$= z + \Sigma\frac{\delta z}{n} - G - \Sigma\frac{\delta G}{n} + \rho + \Sigma\frac{\delta\rho}{n}.$$

D'un autre côté, à cause de $A = z - g = z - (G - \rho)$, il est évident que l'on a

$$(B) \qquad 0 = \Sigma\frac{\delta z}{n} - \Sigma\frac{\delta G}{n} + \Sigma\frac{\delta\rho}{n},$$

et par suite

$$(A') \qquad A_m = z - G + \rho.$$

Dans cette relation (A'), les quantités z, G, ρ correspondent à l'angle horaire moyen P, et l'on a

$$G_m = G + \Sigma\frac{\delta G}{n}, \text{ ainsi que } \rho_m = \rho + \Sigma\frac{\delta\rho}{n},$$

G_m étant l'arc de distance moyen observé, et ρ_m sa réduction à l'horizon.

Pour déterminer l'azimut A_m il faudrait donc connaître la moyenne des accroissemens de l'arc G, représentée par $\Sigma\frac{\delta G}{n}$, et la réduction à l'horizon de cet arc, désignée par ρ. D'abord un des accroissemens de G, savoir δG, étant fonction de g et de la distance zénitale N de l'astre, on a

$$(1)\ \delta G = \frac{dG}{dg}.\delta g + \frac{dG}{dN}.\delta N + \frac{d^2G}{dg^2}.\frac{\delta g^2}{2} + \frac{d^2G}{dN^2}.\frac{\delta N^2}{2} + \frac{d^2G}{dgdN}.\delta g\delta N + \ldots$$

de plus

$$\delta N = \frac{dN}{dP}.\delta P + \frac{d^2N}{dP^2}.\frac{\delta P^2}{2} + \ldots;$$

et à cause de $\delta g = \delta z$, on a pareillement

$$\delta g = \frac{dz}{dP}.\delta P + \frac{d^2z}{dP^2}.\frac{\delta P^2}{2} + \ldots$$

Donc, si l'on substitue ces valeurs dans la série (4), et qu'on s'arrête aux termes du second ordre, il viendra

$$\begin{aligned}\delta G = \left(\frac{dG}{dg}\cdot\frac{dz}{dP} + \frac{dG}{dN}\cdot\frac{dN}{dP}\right)\delta P + \left(\frac{dG}{dg}\cdot\frac{d^2z}{dP^2} + \frac{dG}{dN}\cdot\frac{d^2N}{dP^2}\right)\frac{\delta P^2}{2} \\ + \left[\frac{d^2G}{dg^2}\cdot\left(\frac{dz}{dP}\right)^2 + \frac{d^2G}{dN^2}\cdot\left(\frac{dN}{dP}\right)^2\right]\frac{\delta P^2}{2} \\ + \frac{d^2G}{dgdN}\cdot\frac{dz}{dP}\cdot\frac{dN}{dP}\cdot\delta P^2.\end{aligned}$$

Pour un autre accroissement $\delta G'$ on aurait une expression toute semblable, dans laquelle il faudrait seulement changer δP en $\delta P'$. Par conséquent la moyenne de tous les accroissemens que l'on considère sera $\Sigma\frac{\delta G}{n}$; et puisque nous rapportons tout à l'instant du milieu, auquel cas $\Sigma\frac{\delta P}{n} = 0$, on aura simplement

$$(5)\qquad \Sigma\frac{\delta G}{n} = \left\{\begin{aligned} & \frac{dG}{dg}\cdot\frac{d^2z}{dP^2} + \frac{dG}{dN}\cdot\frac{d^2N}{dP^2} \\ & + \frac{d^2G}{dg^2}\cdot\left(\frac{dz}{dP}\right)^2 + \frac{d^2G}{dN^2}\cdot\left(\frac{dN}{dP}\right)^2 \\ & + \frac{2d^2G}{dg\,dN}\cdot\frac{dz}{dP}\cdot\frac{dN}{dP}\end{aligned}\right\}\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{n.\sin 1''}.$$

Telle est la formule à évaluer pour pouvoir grouper n observations et parvenir à l'azimut A_m. Quant aux coefficiens différentiels qu'elle renferme, et qui la compliquent singulièrement, en voici les valeurs analytiques, d'après ce qui précède;

$$\frac{dz}{dP} = \frac{\sin z\cos S}{\sin P},\quad \frac{d^2z}{dP^2} = -\frac{\sin z\cos z}{\sin^2 P} + 2\cot z\left(\frac{dz}{dP}\right)^2 - \cot P\cdot\frac{dz}{dP};$$

$$\frac{dN}{dP} = \sin S\cos D,\quad \frac{d^2N}{dP^2} = \frac{\cos H\cos D\cos S\cos z}{\sin N};$$

$$\frac{dG}{dg} = \frac{\sin g\sin M\sin N}{\sin G},\quad \frac{d^2G}{dg^2} = \cot g.\frac{dG}{dg} - \cot G\left(\frac{dG}{dg}\right)^2;$$

$$\frac{dG}{dN} = \frac{\cos M\sin N - \cos g\sin M\cos N}{\sin G} = \cos S',\quad \frac{d^2G}{dN^2} = \cot G\sin^2 S';$$

$$\frac{d^2G}{dg\,dN} = \cot N.\frac{dG}{dg} - \cot G.\frac{dG}{dg}\cdot\frac{dG}{dN}.$$

Dans ces coefficiens différentiels, M exprime la distance zénitale de l'objet terrestre et S l'angle au soleil entre son vertical et son cercle de déclinaison; enfin N est la distance zénitale apparente de cet astre. Ceux qui sont fonction de G et g ne peuvent être déterminés numériquement qu'en évaluant d'abord ces deux arcs de manière à ce qu'ils correspondent à très peu près à l'angle horaire moyen P : or G s'obtiendra par la méthode ordinaire d'interpolation appliquée aux arcs G', G'', G'''... notés dans le cours de la série. On pourrait même supposer $G = G_m$. Ensuite avec cet arc, la distance zénitale N du soleil, corrigée de la réfraction et de la parallaxe, et calculée pour l'instant P; enfin la distance zénitale M de l'objet terrestre, on calculera g, et l'on aura $\rho = G - g$. Donc le problème sera résolu.

On pourrait cependant objecter que cette solution suppose la déclinaison du soleil constante et la variation de réfraction nulle; mais il ne serait pas difficile de se convaincre, comme au n° 5, que les changemens de déclinaison et de réfraction n'influent pas d'une seconde sur l'azimut déterminé par notre méthode, surtout lorsque la durée des observations n'est que d'une demi-heure au plus (*voyez* la Note IV).

Une objection mieux fondée serait celle qui porterait sur la longueur des calculs des neuf coefficiens différentiels; aussi est-il très préférable, dans la pratique, de déterminer la correction $\Sigma \frac{\delta G}{n}$ ainsi qu'il suit.

Si le lieu de l'observation dont Z est le zénit, est considéré comme le centre d'une sphère, les arcs de grand cercle RS, PS, PR appartenant à cette sphère seront des arcs apparens : le premier, en tant que S est la position du soleil au milieu de l'intervalle, représente l'arc de distance moyen G; le second est la distance polaire apparente que nous désignerons par Δ_1; et le troisième PR est une portion du méridien apparent du signal R que nous appellerons μ_1. Enfin, nous désignerons par φ l'angle opposé à M dans le triangle sphérique ZPR, et par θ l'angle opposé au côté G dans le triangle PRS.

Le côté G et l'angle opposé θ de ce dernier triangle peuvent être considérés comme les seules quantités variables, dans l'intervalle

d'un quart-d'heure ou d'une demi-heure au plus; ainsi on a

$$\Sigma\frac{\delta G}{n}=\frac{dG}{d\theta}.\Sigma\frac{\delta\theta}{n}+\frac{d^2G}{d\theta^2}.\Sigma\frac{\delta\theta^2}{2}+\ldots$$

Mais en général $\theta=P-\varphi$, et puisque φ est un angle constant, l'on a évidemment $\delta\theta=\delta P$; partant

$$\Sigma\frac{\delta G}{n}=\frac{dG}{d\theta}.\Sigma\frac{\delta P}{n}+\frac{d^2G}{d\theta^2}.\Sigma\frac{\delta P^2}{2.n},$$

ou simplement

$$(5')\qquad \Sigma\frac{\delta G}{n}=\frac{d^2G}{d\theta^2}.\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{n.\sin 1''},$$

à cause de $\Sigma\frac{\delta P}{n}=0$. D'ailleurs, d'après le n° 2, le triangle PRS donne

$$\frac{\delta G}{d\theta}=\frac{\sin\theta\sin\mu_1\sin\Delta_1}{\sin G},\quad \frac{d^2G}{d\theta^2}=\cot\theta.\frac{dG}{d\theta}-\cot G.\frac{dG^2}{d\theta^2}.$$

Voilà donc les seuls coefficiens différentiels à évaluer pour obtenir la correction $\Sigma\frac{\delta G}{n}$; mais il faut préalablement déterminer l'angle θ et les arcs apparens μ_1, Δ_1. On remarquera d'abord que dans le triangle sphérique ZSP, les deux côtés N, C et l'angle compris *Z* sont connus; mais comme il s'agit ici des lieux apparens, on diminuera la colatitude C de la réfraction qui a lieu à la hauteur du pôle, et l'on prendra pour N la distance zénitale apparente du soleil à l'époque moyenne P : on pourra donc déterminer l'arc Δ_1. Pareillement, dans le triangle RZP l'on connaît les deux côtés M, C, et approximativement l'angle compris 180°—A; ainsi la valeur du côté μ_1 et celle de l'angle φ s'en déduiront naturellement. Cette solution, quoiqu'un peu moins analytique que la précédente, doit, à cause de sa simplicité, conduire avec plus de sûreté au résultat que l'on cherche : elle réclame d'ailleurs beaucoup moins d'attention relativement aux signes algébriques.

10. En général, en calculant deux ou trois séries séparément, les résultats s'accorderont d'autant mieux que l'astre sera moins proche de l'horizon, et l'on n'aura pas à craindre que les azimuts

déterminés de la sorte soient influencés par les réfractions extraordinaires qui ont souvent lieu au niveau du sol, si l'on ne commence ou si l'on ne continue les observations que quand le soleil est à 8 ou 10 degrés au-dessus de l'horizon.

Néanmoins, dans les recherches délicates de la figure de la terre, où les azimuts sont des élémens essentiels, on doit, à défaut de lunette méridienne, préférer les observations par la polaire. Plusieurs géomètres ont donné à ce sujet quelques méthodes particulières. M. Legendre, notamment, a non-seulement proposé d'observer cette étoile aux époques de sa plus grande digression du méridien, mais même a donné une formule analogue à celle qui lui sert pour déduire les latitudes des distances circumméridiennes. (*Voyez* les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1787). Il me semble toutefois que la comparaison de la polaire avec un réverbère placé convenablement à l'horizon, peut, à la rigueur, être faite à une heure quelconque de la nuit, et que les formules relatives au soleil sont susceptibles de recevoir encore leur application, à quelques modifications près.

Par exemple, on détermine avec beaucoup de précision et de facilité l'azimut du soleil correspondant au milieu de l'intervalle, à l'aide des analogies de Néper, savoir :

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(Z+S)=\cot\tfrac{1}{2}P\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\Delta-C)}{\cos\frac{1}{2}(\Delta+C)},$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(Z-S)=\cot\tfrac{1}{2}P\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\Delta-C)}{\sin\frac{1}{2}(\Delta+C)};$$

et l'on a en outre la distance zénitale de cet astre par cette formule,

$$\sin\tfrac{1}{2}N=\cos\tfrac{1}{2}P\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\Delta-C)}{\sin\frac{1}{2}(Z-S)},$$

lorsqu'on n'est pas certain d'avance que cette distance est plus grande ou plus petite que 90°. Mais pour obtenir l'azimut de la polaire dans la même circonstance, il convient de substituer à ces analogies la série suivante :

$$(6)\quad 180-z=\frac{\Delta\sin P}{\cos H}+\frac{\Delta^2\sin P\cos P\,\text{tang}\,H}{\cos H}+\frac{1}{3}\frac{\Delta^3\sin P\cos^2 P}{\cos H}(4\,\text{tang}^2 H+1)$$
$$-\frac{1}{3}\frac{\Delta^3\sin P}{\cos H}.\,\text{tang}^2 H,$$

demontrée à l'art. 195 du *Traité de Géodésie*, et dans laquelle P exprime l'angle horaire correspondant au milieu de la durée de la série, Δ la distance polaire de l'étoile affectée de l'aberration et de la nutation, et H la latitude de l'observatoire.

L'azimut z étant trouvé, on y appliquera la correction

$$\Sigma \frac{\delta z}{n} = -\frac{\sin z \cos z}{\sin^2 P} \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''},$$

à laquelle se réduit dans ce cas celle plus générale obtenue au n° 8; ou bien l'on emploiera celle-ci :

$$(7) \qquad \Sigma \frac{\delta z}{n} = \frac{\Delta \sin P}{\cos H} . \Sigma \frac{2 . \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''},$$

que l'on tire aisément de la série (6). Cet azimut, ainsi corrigé, étant ensuite diminué de l'arc de distance moyen réduit à l'horizon, donnera enfin l'azimut du réverbère.

Il est remarquable que l'extrême lenteur du mouvement de la polaire autorise à considérer l'arc moyen observé comme correspondant à l'époque moyenne, toutes les fois que la durée des observations n'excède guère un quart-d'heure. Cette circonstance simplifie donc de beaucoup la solution du problème; ainsi l'on se bornera à réduire à l'horizon l'angle entre le réverbère et l'étoile, observé au cercle ordinaire; et pour cet effet l'on déterminera préalablement la distance zénitale vraie N de l'étoile à l'époque du milieu de l'intervalle, au moyen de cette série

$$(8) \quad N = C - \Delta \cos P + \tfrac{1}{2} \Delta^2 \operatorname{tang} H \sin^2 P + \frac{\Delta^3}{2} \sin^2 P \cos P (\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2 H),$$

démontrée pareillement à l'art. 195 du T. I de la *Géodésie;* après quoi l'on convertira cette distance vraie en distance apparente, en la diminuant de la réfraction. Ces deux dernières séries s'évalueront avec facilité et promptitude, parce qu'elles se composent des mêmes élémens.

Il résulte de ce qui précède que le calcul des azimuts par le soleil ou par une étoile quelconque, conserve en tout point son uniformité, et que, relativement à la polaire, il se trouve dégagé de plusieurs considérations inhérentes aux méthodes particulières (*voyez* l'art. 330

5

et suiv. de la *Géodésie*). Mais quelle est la circonstance la plus favorable pour que cette étoile fasse connaître un azimut terrestre avec le plus d'exactitude possible? C'est évidemment aux époques des digressions orientale et occidentale, puisqu'en différenciant l'équation (6) par rapport à z et P on a, à fort peu près,

$$dz = -\frac{\Delta \cos P}{\cos H} dP,$$

et que la plus petite erreur sur l'azimut, produite par celle qui peut affecter l'angle horaire, se manifeste lorsque cet angle est droit.

Donnons maintenant quelques exemples numériques propres à guider dans l'application de la méthode que nous venons d'exposer.

PREMIER EXEMPLE.

11. Supposons le cas le plus simple, celui où l'angle entre le centre du soleil et le signal est mesuré horizontalement, et feignons qu'on ait les données suivantes :

TEMPS VRAI.	ANGLES HORAIRES δP.	RÉDUCTIONS A L'ÉPOQUE MOYENNE.
$5^h 20'$	$+ 16'$	$502''8$
28	8	125,7
36	0	0
44	$- 8$	125,7
52	16	502,8
époque moyenne $5^h 36'$	Somme... = $1257''0$	
ou P = 84°	$\frac{1}{5}$ = $251,4 = \Sigma \frac{2.\sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n.\sin 1''} = F.$	

Supposons en outre, colatitude C=42°, distance polaire Δ=68°; on trouvera l'azimut Z du soleil compté du nord, et l'angle S au moyen des analogies de Néper, dont voici le calcul.

$$\cot \tfrac{1}{2} P = 0{,}0455626 \qquad \cot \tfrac{1}{2} P = 0{,}0455626$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(\Delta - C) = 9{,}9887239 \qquad \sin \tfrac{1}{2}(\Delta - C) = 9{,}3520880$$
$$\text{C.} \cos \tfrac{1}{2}(\Delta + C) = 0{,}2414087 \qquad \text{C.} \sin \tfrac{1}{2}(\Delta + C) = 0{,}0866355$$
$$\text{tang} \tfrac{1}{2}(Z + S) = 0{,}2756952 \qquad \text{tang} \tfrac{1}{2}(Z - S) = 9{,}4842861\,;$$

de là

$$\tfrac{1}{2}(Z+S) = 62^\circ\ 4'\ 29''4$$
$$\tfrac{1}{2}(Z-S) = 16.57.40{,}5$$
$$Z = 79.\ 2.\ 9{,}7$$
$$S = 45.\ 6.49{,}1\,;$$

et par conséquent l'azimut compté du sud, ou

$$z = 180 - Z = 100^\circ 57' 50'',3.$$

L'azimut z du soleil, compté du sud à l'ouest, répondant à l'époque moyenne des observations, doit être augmenté de la correction $\Sigma \frac{\delta z}{n}$, pour représenter exactement le milieu entre tous ceux observés : or, par les formules précédentes on a

Formule (α).

$$\sin z = 9{,}99200$$
$$\cos S = 9{,}84862$$
$$\text{C.} \sin P = 0{,}00239$$
$$\log \frac{dz}{dP} = 9{,}84301.$$

Formule (β).

1er terme.	2e terme.	3e terme.
$\sin z = 9{,}99200-$	$\log 2 = 0{,}30103$	$\cot P = 9{,}02162+$
$\cos z = 9{,}27919-$	$\log\left(\frac{dz}{dP}\right)^2 = 9{,}68602$	$\log\left(\frac{dz}{dP}\right) = 9{,}84301-$
$\text{C.} \sin^2 P = 0{,}00478$	$\cot z = 9{,}28719-$	$\log F = 2{,}40037$
$\log F = 2{,}40037$	$\log F = 2{,}40037$	$1{,}26500-$
$1{,}67634+$	$1{,}67461-$	$= -18''41$
$= +47''46$	$= -47''27$	
$-47{,}27$		
$-18{,}41$		

corr. $\Sigma \frac{\delta z}{n} = -18{,}22$

RÉCAPITULATION.

$$
\begin{aligned}
& z = 100^\circ\, 57'\, 50''30 \\
\text{correction } \Sigma \frac{\delta z}{n} = & \qquad -18,22 \\
\text{azimut moyen, } z_m = & \; 100^\circ\, 57'\, 32''08.
\end{aligned}
$$

Cet azimut est précisément celui auquel on parvient en prenant la moyenne arithmétique des cinq azimuts calculés directement, et dont les différences 3'' sont seulement constantes : en le diminuant de l'arc de distance g_m supposé mesuré au théodolite répétiteur, on aurait enfin l'azimut du signal. On peut aisément, dans l'intervalle d'une demi-heure, faire 20 à 30 observations de ce genre; ainsi, en n'en formant qu'un seul groupe on aurait très promptement et très exactement, par le calcul ci-dessus, l'azimut cherché.

Si l'on ne voulait pas rapporter toutes les observations à l'époque du milieu, il faudrait, de toute nécessité, tenir compte des termes du 1er et du 3e ordre de la série (1); il faudrait même avoir égard aux termes dépendans de la variation en déclinaison dont nous avons donné aussi les valeurs; mais les azimuts ne pourraient plus, dans ce cas, être calculés avec la simplicité qui résulte de l'autre hypothèse. Cependant, ce ne serait pas perdre un temps précieux que de partager en deux séries au moins les observations faites le matin ou le soir, parce que l'on se procurerait par là l'avantage de pouvoir vérifier les résultats les uns par les autres.

DEUXIÈME EXEMPLE.

12. Le calcul des azimuts est beaucoup plus compliqué, lorsque l'arc de distance entre le soleil et un objet terrestre a été mesuré avec un cercle répétiteur ordinaire, et que l'on groupe ensemble plus de six observations. Il mérite par conséquent d'être exposé avec détail, et c'est ce que nous allons faire.

Choisissons parmi les nombreuses observations azimutales du soleil, faites à Bourges par l'auteur de la *Base du Système métrique décimal,* les vingt premières du 9 juillet 1795, et formons un seul groupe, en rapportant toutes ces observations au milieu de leur

durée qui n'excède pas une demi-heure, ainsi qu'on le voit par le tableau suivant.

TEMPS de la PENDULE.	ANGLES HORAIRES δP.	Réductions à l'époque moyenne.	AUTRES ÉLÉMENS DU CALCUL.
$5^h 51' 35''3$	$+13' 41''2$	$367''5$	Réduction de la pendule au
52.51	12.25,5	303	temps vrai $= - 3' 51''3$.
53.52	11.24,5	255,5	
55. 5,5	10.11	203,6	
57. 3,5	8.13	132,6	Latitude de Bourges,
58.26	6.50,5	91,9	
59.31,5	5.45	64,9	$H = 47° 5' 5''$
6. 0.51	4.25,5	38,4	colatitude, $C = 42.54.55$.
2.45	2.31,5	12,5	
3.50,5	1.26,0	4,0	
5.22,2	$-$ 0. 5,7	0,0	Réfraction $= 191''08$
6.32	1.15,5	3,1	Parallaxe $= 8,31$.
10.31	5.14,5	53,9	
11.38	6.21,5	79,4	
12.46	7.29,5	110,2	Angleobservé, ou moyenne des 20,
13.48,5	8.32	143,0	$G_m = 69° 54' 44''66$.
15.35,2	10.18,7	208,9	
16,42,5	11.25	255,9	
17.45,5	12.29	305,9	Distance zénitale du signal,
$n = 20$. 18.58	13.41,5	367,9	$M = 90° 10' 37''$.
époq. moy. } $6^h 5' 16''5$	Somme $= 3002,1$; le $20^e = 150,105 = \Sigma \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''} = F$.		

Il résulte de ce tableau que le milieu de la durée de la série répondait à la pendule à. . . . . $6^h 5' 16''5$

et comme réduction au temps vrai. . . $= - 3.51,3$

on a angle horaire vrai. . . . . . . $= 6^h 1' 25''2$

et en degrés. . . . . $P = 90° 21' 17''6$.

Enfin, on trouve la déclinaison du soleil pour cet instant,

$D = 22° 20' 10''5$

et distance polaire. . . . $\Delta = 67.39.49,5$.

Avec ces données, l'azimut Z du soleil, compté du nord, et l'angle S à cet astre s'obtiendront à la fois, comme on l'a vu ci-dessus ; ainsi on aura

$$\begin{aligned} \Delta &= 67°39'49''5 \\ C &= 42.54.55 \\ \hline \Delta + C &= 110.34.44,5 \qquad \tfrac{1}{2}(\Delta + C) = 55°17'22''25 \\ \Delta - C &= 24.44.54,5 \qquad \tfrac{1}{2}(\Delta - C) = 12.22.27,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot\tfrac{1}{2}P &= 9{,}9973100 & \cot\tfrac{1}{2}P &= 9{,}9973100 \\ \cos\tfrac{1}{2}(\Delta - C) &= 9{,}9897918 & \sin\tfrac{1}{2}(\Delta - C) &= 9{,}3310143 \\ C.\cos\tfrac{1}{2}(\Delta + C) &= 0{,}2445460 & C.\sin\tfrac{1}{2}(\Delta + C) &= 0{,}0851071 \\ \hline \tan\tfrac{1}{2}(Z + S) &= 0{,}2316478 & \tan\tfrac{1}{2}(Z - S) &= 9{,}4134314\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de là}\quad \tfrac{1}{2}(Z + S) &= 59°36'12''71 \\ \tfrac{1}{2}(Z - S) &= 14.31.29,07 \\ \hline Z &= 74.\ 7.41,78 \qquad z = 180° - Z \\ S &= 45.\ 4.43,64 \qquad\ \ = 105°52'18''22. \end{aligned}$$

Quant à la distance zénitale du soleil, on l'obtiendra par ce calcul :

$$\begin{aligned} C.\sin\tfrac{1}{2}(Z - S) &= 0{,}6006764 \\ \sin\tfrac{1}{2}(\Delta - C) &= 9{,}3310143 \\ \cos\tfrac{1}{2}P &= 9{,}8481358 \\ \hline \sin\tfrac{1}{2}N &= 9{,}7798265, \qquad \tfrac{1}{2}N = 37°2'10'',1\,; \end{aligned}$$

de là et de ce qui précède,

$$\begin{aligned} N &= 74°\ 4'\ 20''2 \\ +\text{parallaxe} - \text{réfraction} &= -\quad 5.\ 2,8 \\ \hline \text{distance zénit. appar. du soleil},\quad N_1 &= 74°\ 1'\ 17''4. \end{aligned}$$

Il faudrait à l'azimut z du soleil, compté du sud à l'ouest, et répondant à l'époque moyenne des observations, ajouter la correction $\Sigma\frac{\delta z}{n}$, afin qu'il représentât précisément le milieu entre tous ceux observés : mais ce qu'il nous importe de connaître, c'est la correction $\Sigma\frac{\delta G}{n}$ donnée par la formule (5), laquelle exige que l'on

détermine d'abord approximativement l'arc de distance G correspondant au milieu de la durée de la série. Pour cet effet, l'on remarquera que les vingt observations précédentes groupées de 4 en 4, comme l'a fait Delambre, présentent ces résultats :

NOMBRE des Observat.	TEMPS de la PENDULE.	Intervall.	DISTANCES OBSERVÉES.	Variation.	AZIMUT du signal.
4	$t' = 5^h 53' 20'' 95$	$5' 38'' 05$	$G' = 72° \; 3' \; 9'' 5$	$1° \; 0' 15'' 8$	$5° 6' 51'' 0$
4	$t'' = 5.58.58,00$	$5.38,28$	$G'' = 71. \; 2.53,7$	$1. \; 0.49,9$	$5.6.46,0$
4	$t''' = 6. \; 4.37,28$	$7.33,59$	$G''' = 70. \; 2. \; 3,8$	$1.21.38,8$	$5.6.36,0$
4	$t^{IV} = 6.12.10,87$	$5. \; 4,43$	$G^{IV} = 68.40.25,0$	$0.55.14,0$	$5.6.34,0$
4	$t^{V} = 6.17.15,30$		$G^{V} = 67.45.11,0$		$5.6.46,0$
$n = 20$ époque moyenne.	$t_m = 6. \; 5.16,5$	distance moyenne.	$G_m = 69° 54' 44'' 66$	milieu $= 5.6.42,6$	

Ainsi, dans $7' 33'',59 = 7',56$, la distance a diminué de $1° 21' 39''$, ou de $81',65$; ce qui fait une diminution de $10',8$ par minute. Par conséquent, puisque l'époque moyenne $6^h 5' 16'',5$ excède l'époque t''' de $39'',2$, la distance G''' a diminué proportionnellement de $7' 1'',2$ dans l'intervalle de ces $39'',2$; partant $G = 69° 55' 2'',6$. Cette méthode d'interpolation est suffisamment exacte; il n'y aurait pas même d'inconvénient à supposer $G = G_m$.

La distance G et les deux arcs M, N,, dont les valeurs sont relatées ci-dessus, sont les trois côtés d'un triangle sphérique dans lequel g est l'angle des deux arcs dont il s'agit. En déterminant cet angle par la formule connue, on a. . . . . . $g = 69° \; 1' \; 7'' 4$

mais. . . . . $G = 69.55. \; 2,6$

donc la réduction à l'horizon, $\rho = \overline{0° \; 53' \; 55'' 2}$.

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour évaluer les neuf coefficiens différentiels qui entrent dans la formule (5). En faisant le calcul à l'aide des logarithmes à 5 décimales et des données suivantes obtenues ci-dessus,

$$P = 90^\circ\,21'\,17''6,\quad D = 22^\circ\,20'\,10''5,\quad z = 105^\circ\,52'\,18''22;$$
$$S = 45.\ 4.44,\quad N_1 = 74.\ 1.10,\quad G = 69.55.\ 2,6;$$
$$M = 90.10.37,\quad G_m = 69.54.44,66,\quad g = 69.\ 1.\ 7,4;$$

N_1 étant la distance zénitale apparente du soleil, on trouvera

$$\log\frac{dz}{dP} = 9,85201+,\qquad \log\frac{dG}{dg} = 9,98030+,$$
$$\log\frac{d^2z}{dP^2} = 7,69285+,\qquad \log\frac{d^2G}{dg^2} = 8,51282+,$$
$$\log\frac{dG}{dN} = 9,00766-,\qquad \log\frac{dN}{dP} = 9,81621+,$$
$$\log\frac{d^2G}{dN^2} = 9,55848+,\qquad \log\frac{d^2N}{dP^2} = 9,10221-,$$
$$\log\frac{d^2G}{dg\,dN} = 9,49030+,$$

et comme d'après le tableau des réductions à l'époque moyenne on a eu

$$\log\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{n.\sin 1''} = 2,17658 = \log F;$$

il ne reste plus qu'à introduire ces valeurs dans la formule (5). Mais pour que cette formule se rapporte aux observations actuelles, il est nécessaire et il suffit d'y changer le signe des coefficiens différentiels $\frac{dz}{dP}$ et $\frac{d^2z}{dP^2}$, c'est-à-dire de les prendre négativement; parce que le soleil étant à la gauche du signal, au lieu d'être à la droite, comme nous l'avions supposé, on a $\delta z = -\delta g$. On trouvera alors sans peine

$$\Sigma\frac{\delta G}{n} = -14'',52;$$

et puisque généralement l'arc observé $G_m = G + \Sigma \frac{\delta G}{n}$, on aura

$$G = G_m - \Sigma \frac{\delta G}{n} = 69°\,54'\,59'',18.$$

Ce résultat prouve que la méthode d'interpolation qui nous a servi pour avoir une valeur très approchée de G, est, comme nous l'avons dit, bien suffisante, et qu'il est inutile de chercher une valeur de ρ plus exacte que celle ci-dessus. Si on l'introduit dans la relation (A') qui devient, dans le cas actuel, $A_m = z + G - \rho$, on aura enfin

$z =$	105° 52′ 18″22	
$+ G =$	69.54.59,18	
Somme =	175.47.17,40	
$-\rho =$	−0.53.55,20	
azimut cherché, $A_m =$	174.53.22,20	
ou $180° - A_m =$	5. 6.37,8	compté du nord
moyenne de 5 azimuts selon Delambre. . . . . =	5. 6.42,6	
différence. . .	4″8.	

Il est plus commode, à certains égards, de déterminer la correction $\Sigma \frac{\delta G}{n}$, à l'aide de la formule (5') du n° 9. En effet, les élémens de cette formule, relatifs aux lieux apparens, étant

$N_1 = 74°\ 1'\ 10''$, $C_1 = 42°\,54'\,55''$ — réfr. $= 42°\,54'\,2''$
$M = 90.10.37$, $A = z + g = 174.53.26$, $\log F = 2,17638$;
$180° - A = 5.\ 6.34$;

le triangle ZSP donnera

$$\cos \Delta_1 = \cos N_1 \cos C_1 + \sin N_1 \sin C_1 \cos Z;$$

d'où $\Delta_1 = 67°\,37'\,39''$.

D'un autre côté, en appliquant les analogies de Néper au triangle ZRP (n° 10), on trouvera

$$\varphi = 173°\,3'\,45'',\quad \mu_1 = 47°\,29'\,2'';$$

6

de là

$$\theta = \varphi - P = \varphi - 90^\circ\,21'\,18'' = 82^\circ\,42'\,27''.$$

Calculant ensuite les coefficiens différentiels

$$\frac{dG}{d\theta} = \frac{\sin\theta \sin\mu_1 \sin\Delta_1}{\sin G}, \quad \frac{d^2G}{d\theta^2} = \cot\theta \cdot \frac{dG}{d\theta} - \cot G \left(\frac{dG}{d\theta}\right)^2,$$

on aura, par les logarithmes,

$\sin\theta = 9{,}99647$	$\cot\theta = 9{,}10706$	$-\cot G = -9{,}56302$
$\sin\mu_1 = 9{,}86753$	$\log\frac{dG}{d\theta} = 9{,}85727$	$\log\left(\frac{dG}{d\theta}\right)^2 = 9{,}71454$
$\sin\Delta_1 = 9{,}96602$	$+8{,}96433$	$-9{,}27756$
$C.\sin G = 0{,}02725$	$= +0{,}092117$	$= -0{,}189475$
$\log\frac{dG}{d\theta} = 9{,}85727$	$-0{,}189475$	
	$\frac{d^2G}{d\theta^2} = -0{,}097358$	$\log = -8{,}98837$
		$\log F = 2{,}17638$
		$-1{,}16475$
		$\Sigma\frac{\partial G}{n} = -14'',61.$

Nous voilà donc arrivés par deux routes très différentes à la même valeur de $\Sigma\frac{\partial G}{n}$, du moins sensiblement. Ceci nous éloigne de l'idée d'une erreur à cet égard, et nous porte à croire que cette dernière solution, appuyée sur des principes incontestables, mérite la préférence sur le procédé usité. Il ne paraît pas d'ailleurs que les changemens de déclinaison du soleil et de réfraction pendant la courte durée de la série, si l'on voulait en tenir compte, puissent altérer d'une seconde notre résultat, ainsi que nous l'avons déjà dit. Cependant l'on fera bien de resserrer la durée des observations dans les limites de 15 à 20 minutes.

Lorsque l'on groupe seulement quatre à quatre les observations azimutales du soleil, on détermine, comme nous venons de le faire, l'azimut de cet astre pour le milieu de la série, et l'on réduit l'arc de distance G_m à l'horizon, sans y appliquer la correction que nous

exprimons par $\Sigma \frac{\delta G}{n}$: cette correction est précisément l'erreur que l'on commet par cette méthode ; elle est, dans le cas actuel, de 0",76, et affecte chaque résultat en particulier. En effet, les 4 observations ayant ordinairement lieu dans 4' de temps, le facteur $\Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''}$ est à très peu près de 5"; et comme les coefficiens différentiels ci-dessus changent très peu de valeur dans l'intervalle des 20 observations précédentes, il s'ensuit qu'en les supposant constans la formule (5') donne

$$\Sigma \frac{\delta G}{n} = -0'',76.$$

Une quantité aussi petite, et qui ne peut s'accroître par le procédé dont il s'agit, est certainement bien au-dessous des erreurs d'observation. Ces erreurs proviennent, entre autres causes, de la difficulté de manœuvrer le cercle répétiteur de manière que le centre du soleil et le point de mire de l'objet terrestre se trouvent dans le plan du limbe, à l'instant même où le fil vertical d'un des réticules est en contact avec l'un des bords de l'astre. Elles peuvent aussi naître en partie de la petite incertitude qui existe sur le demi-diamètre du soleil pris dans les tables astronomiques, et dont il faut tenir compte lorsqu'on n'observe pas alternativement les deux bords.

TROISIÈME EXEMPLE.

13. Le 7 mars 1793, Méchain orienta les triangles de la méridienne de France, en observant plusieurs fois à Montjoui, avec un cercle répétiteur construit par Lenoir, l'angle entre la polaire et le réverbère de la Sierra-Morella, vers l'époque de la plus grande digression occidentale. Sa pendule, réglée sur le temps moyen, n'ayant pu être placée auprès du cercle, il fit usage, pour connaître le temps des observations, d'un chronomètre qui retardait de 3'6",5 sur la pendule. Voici une de ses séries extraites de la *Base du Système métrique décimal*.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	TEMPS du CHRONOMÈTRE.	ARC PARCOURU.	AUTRES DONNÉES ESSENTIELLES.
1	7h 17′ 16″		Barom. = 27po 5lig,4.
2	20.26		Thermomètre = + 7°,52 de Réaumur.
3	23.47		Distance zénitale du réverbère, M = 89° 5′ 40″.
4	26.53	401° 35′ 24″	Réduction au centre de la station, + 15″,4.

Afin de déduire de là l'azimut du réverbère, il faut recueillir les autres élémens du calcul. D'abord la latitude de Montjoui,

$$H = 41° 21' 44'', \quad \text{sa colatitude} \quad C = 48° 38' 16'';$$

et selon Méchain, la distance de l'étoile au pôle, corrigée de l'aberration et de la nutation, ou $\Delta = 1° 47' 43'',4 = 6463'',4$.

Quant au temps du passage de l'étoile au méridien de Montjoui, comme il ne se trouve pas donné explicitement dans l'ouvrage cité, on l'obtiendra au moyen des données suivantes.

Le 1er janvier 1793, l'ascension droite moyenne de la polaire, d'après la *Connaissance des Tems*, = 12° 41′ 2″
Variation annuelle, + 187″
Longitude du soleil le 7 mars... ⊙ = 11s 15. 7′
Lieu du nœud de la lune *idem*. ☊ = 5.17. 7
Distance de l'équin. au ⊙, à midi, = 0h 46′ 16″3
Variation diurne, — 3.41,4
Équation du temps, à midi vrai.... + 11. 9,0
Variation diurne, — 14,0.

De là,

ascension droite moyenne. . .	12° 41′ 2″
précession.	+ 35,5
Æ moyenne le 7 mars. . . .	12.41.37,5
en temps.	0^h 50′ 46″50
aberration.	— 35,25
nutation.	+ 18,03
temps sidéral du passage. . =	0^h 50′ 29″3
distance de l'équin. à midi. . .	0.46.16,3
temps vrai approché.	1.36.45,6
mouvement du soleil.	— 14,8
temps vrai exact.	1.36.30,8
équation du temps.	+ 11. 8,4
temps moyen du passage au méridien supérieur de Montjoui, =	1^h 47′ 39″2

Un examen attentif des résultats numériques de Méchain m'a fait voir que sa pendule, bien que réglée sur le temps moyen, retardait cependant de 13′ 36″,4. J'ai découvert ce retard absolu dont il n'est point parlé, ainsi qu'il suit :

angle horaire du réverbère =	77° 47′ 8″	
angle horaire conclu. . .	7.28.35	
arc sidéral.	85.15.43 =	5^h 41′ 2″87
temps sidéral du passage.		0.50.29,50
temps sidéral de la 1re observation,		+ 6.31.32,17
ascension dr. du soleil moy. à midi,		—23. 2.32,92
temps moyen approché.		7.28.59,25
mouvement du soleil.		— 1.13,39
temps moy. exact de la 1re observ.		7.27.45,86
heure de la pendule.		7.14. 9,50
donc le retard de la pendule. . . . =		0^h 13′ 36″36.

Ce retard étant connu, on l'ôtera du temps moyen du passage au méridien, et l'on aura l'heure du même passage à la pendule $= 1^h 34' 2'',8$.

Formant ensuite le tableau suivant comme au n° 5, il vient, en changeant le temps du chronomètre en temps de la pendule,

TEMPS de la PENDULE.	ANGLES HORAIRES δP. Temps moyen.	ANGLES HORAIRES δP. Temps sidéral.	RÉDUCTIONS A L'ÉPOQUE MOYENNE.
$7^h 14' 9'' 5$	$- 4' 49'' 5$	$- 4' 50''$	$45'' 9$
7.17.19,5	1.39,5	1.40	5,3
7.20.40,5	+ 1.41,5	1.42	5,6
7.23.46,5	4.47,5	4.48	45,2
époque moy. } $7^h 18' 59''$		Somme = 102,0 le $\frac{1}{4}$ =	25,5 $= 2\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{4\sin 1''} = F$.

Il reste à connaître l'angle horaire moyen P correspondant à l'époque moyenne ci-dessus; or on a

époque moyenne. . .	=	$7^h 18' 59''$	
heure du passage. . .	−	1.34. 2,8	
angle horaire moyen...	=	5.44.56,2	temps moy.
réduct. au temps sidér.	+	56,0	
angle horaire. . . . . P	=	$5^h 45' 52'' 2$	temps sidér.
	=	$86° 28' 3''$.	

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour déterminer l'azimut du réverbère; d'abord, par la formule (6) on connaîtra l'azimut z de l'étoile, compté du sud à l'ouest, et correspondant à l'angle horaire moyen ci-dessus. Voici le type de ce calcul.

Elémens des formules.

$\Delta = 6463'',4$, $\quad P = 86^\circ\, 28'\, 3''$, $\quad \sin P = 9{,}9991741$

$\cos P = 8{,}7896843$

$C = 48^\circ\, 38'\, 16''$, $\quad H = 41.21.44''$, $\quad \operatorname{tang} H = 9{,}944703$

$\cos H = 9{,}8753779.$

Formule (6).

1[er] terme.

$$\log \Delta = 3{,}8104610$$
$$\sin P = 9{,}9991741$$
$$C.\cos H = 0{,}1246221$$
$$\log \frac{\Delta \sin P}{\cos H} = 3{,}9342572 \; +$$
$$= +\, 8595'',22$$

2[e] terme.

$$\log \Delta^2 = 7{,}620922$$
$$\sin P = 9{,}999174$$
$$\cos P = 8{,}789684$$
$$\operatorname{tang} H = 9{,}944703$$
$$C.\cos H = 0{,}124622$$
$$\sin 1'' = 4{,}685575$$
$$1{,}164680 \; +$$
$$= +\, 14'',61$$

3[e] terme.

$$\log \tfrac{1}{3} = 9{,}52288$$
$$\log \Delta^3 = 1{,}43138$$
$$\sin^2 1'' = 9{,}37115$$
$$\sin P = 9{,}99917$$
$$C.\cos H = 0{,}12462$$
$$\cos^2 P = 7{,}57937$$
$$8{,}02857 \; +$$
$$= +\, 0'',01$$

4[e] terme.

$$\operatorname{tang}^2 H = 9{,}88941$$
$$\log 4 = 0{,}60206$$
$$8{,}02857$$
$$8{,}52004 \; +$$
$$= +\, 0'',03$$

5[e] terme.

$$0{,}44920 \; -$$
$$= 9{,}88941$$
$$0{,}33861 \; -$$
$$= -\, 2'',18$$

RÉCAPITULATION.

1[er] terme	$= +$	8595"22
2[e]. . . .	$+$	14,61
3[e]. . . .	$+$	0,01
4[e]. . . .	$+$	0,03
5[e]. . . .	$-$	2,18

$$Z = +\, 8607''69 = 2^\circ\, 23'\, 27'',69.$$

De là,

$$z = 180^\circ - Z = 177^\circ\,36'\,32'',31.$$

On voit par cette opération que l'on aurait bien pu se dispenser de calculer les termes du 3e ordre qui ont $\cos^3 P$ pour facteur.

CALCUL DE LA CORRECTION DE z.

Formule (7).

$$\log \frac{\Delta \sin P}{\cos H} = 3{,}93426$$
$$\sin 1'' = 4{,}68557$$
$$\log F = 1{,}40654$$
$$0{,}02637 +$$
$$\Sigma \frac{\delta z}{n} = +1'',06\,;$$

partant,
$$z = 177^\circ\,36'\,32''31$$
$$\text{correction } \Sigma \frac{\delta z}{n} = \quad + 1{,}06$$
$$\text{azimut moyen } z_m = 177^\circ\,36'\,33''37.$$

Formulė (8).

1er terme.	2e terme.	3e et 4e terme qu'on pourrait négliger.	
$\log\Delta = 3{,}8104610-,$	$\log\frac{1}{2} = 9{,}69897$	$\log\frac{1}{2} = 9{,}69897$	
$\cos P = 8{,}7896843$	$\log\Delta^2 = 7{,}62092$	$\log\Delta^3 = 1{,}43138$	
$2{,}6001453-,$	$\sin 1'' = 4{,}68557$	$\sin^2 1'' = 9{,}37115$	
$= -398''24$	$\sin^2 P = 9{,}99834$	$\sin^2 P = 9{,}99834$	
$+ 88{,}82$	$\tang H = 9{,}94470$	$\cos P = 8{,}78968$	
$+ 0{,}06$	$1{,}94850+,$	$+9{,}28952$	...... $9{,}28952$
$+ 0{,}15$	$= +88''82$	$\log\frac{1}{3} = 9{,}52288$	$\tang^2 H = 9{,}88941$
$N - C = -309{,}21$		$+8{,}81240$	$+9{,}17893$
$= -0^\circ\,5'\,9''21$		$= +0'',06$	$= +0'',15$
$C = +48.38.16$			
$N = 48.33.\,6{,}79$		$48^\circ\,33'\,6''79$	
		réfraction $-\ 1.4{,}42$	

distance zénitale apparente de l'étoile, à l'époque moyenne. . . . . } $N_1 = 48^\circ\,32'\,2''37.$

Avec cette distance, celle du réverbère $M = 89° 5' 40''$, et l'arc mesuré $G_m = 100° 23' 51''$, on calculera la projection horizontale de G_m comme il suit :

$$
\begin{array}{rll}
N_t = & 48° 32' \ 2''37 & \\
M = & 89. \ 5.40 & \\
G_m = & 100.23.51 & \\
\text{somme} = & 238. \ 1.33,37 & \\
\text{demi-somme} = & 119. \ 0.46,68 \ \ldots\ldots & 119° \ 0' \ 46''68 \\
-N_t = & 48.32. \ 2,37 & -M = \ 89. \ 5.40 \\
\text{reste } R = & 70.28.44,31 & R' = \ 29.55. \ 6,68
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\sin R = & 9,9742901 \\
\sin R' = & 9,6978986 \\
\text{C.} \sin M = & 0,0000542 \\
\text{C.} \sin N_t = & 0,1253160 \\
\text{somme} = & 19,7975589
\end{array}
$$

demi-somme $= \log \sin \tfrac{1}{2} g_m = 9,8987794 = 52° 22' 55''52$

donc, arc de distance horizontal, $g_m = 104.45.51,04$

donc enfin,

$$
\begin{array}{rll}
& z_m = & 177° \ 36' \ 33''37 \\
& -g_m = & 104.45.51,04 \\
\text{azimut de position du réverbère...} & A_m = & 72.50.42,33 \text{ compté du sud à l'ouest,} \\
\text{ou} & 180° - A_m = & 107. \ 9.17,67 \text{ compté du nord à l'ouest,} \\
+ \text{ réduction au centre,} & & 15,40 \\
& \text{azimut cherché} = & 107° \ 9' \ 33''07.
\end{array}
$$

Tel est effectivement, à un dixième de seconde près, le résultat que Méchain a obtenu par une méthode plus laborieuse et moins directe que celle-ci.

14. Au lieu de calculer la correction d'azimut $\Sigma \frac{\delta z}{n}$, cherchons plutôt la valeur de $\Sigma \frac{\delta G}{n}$ au moyen de la formule (5, p. 29); par là

nous serons à même de juger si les quatre observations qui ont duré environ dix minutes peuvent être groupées sans inconvénient. Les neuf coefficiens différentiels relatifs à la polaire sont

$$\frac{dz}{dP} = -\frac{\sin\Delta\cos P}{\cos H}, \qquad \frac{d^2z}{dP^2} = \frac{\sin\Delta\sin P}{\cos H};$$

$$\frac{dN}{dP} = \sin\Delta\sin P, \qquad \frac{d^2N}{dP^2} = \sin\Delta\cos P;$$

$$\frac{dG}{dg} = \frac{\sin g\sin M\sin N}{\sin G}, \qquad \frac{d^2G}{dg^2} = \cot g.\frac{dG}{dg} - \cot G\left(\frac{dG}{dg}\right)^2;$$

$$\frac{dG}{dN} = \frac{\cos M\sin N - \cos g\sin M\cos N}{\sin G} = \cos S', \quad \frac{d^2G}{dN^2} = \cot G\sin^2 S',$$

$$\frac{d^2G}{dg\,dN} = \cot N\,\frac{dG}{dg} - \cot G\,\frac{dG}{dg}\cdot\frac{dG}{dN}.$$

Tous les élémens en sont connus par ce qui précède. En effet, l'on a

$$\sin\Delta = 8{,}49594, \quad P = 86°\,28', \quad G = 100°\,23'\,51''$$
$$M = 89°\,5'\,40'', \quad N_1 = 48.32, \quad g = 104.45.51$$
$$\rho = -\ 4°\,22'\ 0'';$$

et l'on trouve ensuite

$$\log\frac{dz}{dP} = 8{,}41035 -, \quad \log\frac{d^2z}{dP^2} = 8{,}61973 +,$$

$$\log\frac{dN}{dP} = 8{,}49511 +, \quad \log\frac{d^2N}{dP^2} = 8{,}28573 +,$$

$$\log\frac{dG}{dg} = 9{,}86729 +, \quad \log\frac{d^2G}{dg^2} = 8{,}97575 -,$$

$$\log\frac{dG}{dN} = 9{,}26387 +, \quad \log\frac{d^2G}{dN^2} = 9{,}24870 -,$$

$$\log\frac{d^2G}{dg\,dN} = 9{,}80984 +, \quad \log F = 1{,}40654.$$

Au moyen de ces valeurs numériques, la formule (5), qui doit être prise sans aucun changement de signe, puisque le signal était à la gauche de l'étoile, donne

$$\Sigma\frac{\delta G}{n} = +\,0'',76.$$

Mais $G_m = G + \Sigma \frac{\delta G}{n}$, et $G_m = 100°23'51''$; partant, l'arc de distance correspondant à l'angle horaire moyen, a pour valeur

$$G = 100°23'50'',24.$$

D'ailleurs $A_m = z - G + \rho$, et l'on a eu précédemment....... $z = 177°36'32'',31$; par conséquent

$$\begin{array}{rl} z = & 177°36'32''31 \\ -G = & -100.23.50,24 \\ +\rho = & -\ \ 4.22.\ 0 \\ \hline A_m = & 72.50.42,07 \\ \hline \end{array}$$

ou $\quad 180° - A_m = 107.\ 9.17,93$

à très peu près comme ci-dessus. La correction de distance $\Sigma \frac{\delta G}{n}$ deviendrait donc beaucoup plus sensible, si les observations duraient plus d'un quart d'heure, puisqu'elle croît comme le carré des temps.

En terminant ce Mémoire, nous exprimerons le désir que les astronomes, qui font à tout moment des observations célestes, et que les ingénieurs-géographes surtout, qui travaillent avec un zèle soutenu à la nouvelle description géométrique de la France, trouvent dans le nouveau mode de calcul que nous venons d'exposer, un moyen de se ménager quelque repos, en arrivant plus promptement et avec non moins de sûreté au but qu'ils se proposent.

NOTES.

NOTE Ire.

La méthode du premier paragraphe sera surtout utile dans les observations de longitude, pour déterminer le temps absolu qui en est l'élément essentiel. Ces observations se font avec beaucoup de succès à l'aide de signaux de feu aperçus au même instant physique sous différens méridiens : mais l'on doit croire que si au lieu de ces feux produits par l'inflammation de la poudre à canon, l'on se procurait des éclipses à l'aide d'écrans adaptés aux réverbères construits d'après les idées de M. Fresnel, ingénieur des Ponts et Chaussées, et qui s'aperçoivent de jour à de très grandes distances, les différences de méridien s'obtiendraient en très peu de temps et sans beaucoup de frais avec une extrême précision (*).

Il importe dans ce cas, pour bien s'assurer de la marche de la pendule, de prendre, aux stations d'où le phénomène destiné à faire connaître les différences de longitude doit être aperçu, des distances zénitales absolues de plusieurs étoiles de 1re et de 2e grandeur, quelques heures avant et après les instans de ce phénomène. Avec ces distances zénitales, les positions apparentes des étoiles déduites du même catalogue, et les latitudes des stations, on déterminera le temps sidéral ou le temps solaire moyen de chaque observation; par suite, la correction de la pendule et son avance ou son retard en 24 heures. Si, par exemple, on a observé, dans l'intervalle de quelques heures, trois étoiles A, B, C; que les temps

(*) M. Arago vient d'être à même d'apprécier les avantages que présentent, dans les opérations géodésiques, les lampes à mèches *multiples* concentriques, en opérant une nouvelle jonction de la méridienne de France avec celle d'Angleterre.

sidéraux ou les temps solaires moyens de ces observations soient T, T′, T″, et que les temps correspondans de la pendule soient τ, τ', τ'', les trois corrections données par

$$A, \ B, \ C,$$

seront respectivement

$$T-\tau, \quad T'-\tau', \quad T''-\tau''.$$

Si donc la pendule suivait exactement le temps sidéral ou le temps moyen, et que ces observations fussent exemptes d'erreur, ces trois corrections seraient égales; mais le plus souvent elles différeront entre elles d'une fraction de seconde, et la pendule avancera ou retardera de ρ secondes en 24 heures : alors, pour conclure la correction moyenne des trois observations dont il s'agit, il sera nécessaire de réduire chacune des corrections précédentes à la même époque T_m (*Géodésie*, T. II, p. 122). Cela fait, le tiers de la somme de ces corrections réduites, sera la correction moyenne correspondante à l'époque T_m. Ce calcul et le principe sur lequel il est fondé sont si simples, qu'il est inutile de passer à une application numérique.

NOTE II.

La position apparente de la polaire, servant de base à la détermination de la latitude d'Étampes, a été calculée directement pour le 12 et le 15 août 1822, et l'on a obtenu celle du 13 par interpolation. Par exemple, d'après le catalogue d'étoiles le plus récent, on avait

au 1er janvier 1821,	ascension droite moy.	$Æ = 0^h\,57'\,15'',32$,
	variation annuelle,	$+\ 14,657$,
	déclinaison moy.	$D = 88°\,21'\,13'',90$;
	variation annuelle,	$+\ 19,47$;

et comme le mouvement de précession qui a eu lieu depuis cette époque jusqu'au 12 août 1822, c'est-à-dire pendant un an 224 jours, se trouve en multipliant les variations annuelles par le facteur $1+\frac{224}{365}=1,61$, on a

$$\textit{précession en } Æ = +23'',60, \quad \textit{précession en } D = +31'',35.$$

La position moyenne devant être changée en position apparente, on aura recours, pour cet effet, à la table XVI de la *Géodésie*, T. II, et à la *Connaissance des Tems* de 1822, où l'on trouve, pour le 12 août, vers 9 heures du soir, longitude du soleil, ☉ = 4ˢ19°13′, et lieu du nœud de la lune, ☊ = 10ˢ15°55′. Voici le type de ce calcul, dont les principes sont exposés à l'art. 278 du *Traité de Géodésie*, T. II.

Aberration en Æ.

		logarith.
	☉ = 4ˢ 19° 13′	
Tab. XVI,	8.14.28	1,63776
argument,	1. 3.41	9,74398+
		1,38174+
		= + 24″,08

Aberration en D.

		logarith.
	☉ = 4ˢ 19° 13′	
Tab. XVI,	5.17.28	1,30314
argument,	10. 6.41	9,90415 —
		1,20729 —
		= — 16″,12.

Nutation lunaire en Æ.

☊ = 10ˢ 15° 55′	
8.16.28	1,34981
7. 2.23	9,72883 —
	1,07864 —
	= — 11″,08

Nutation lunaire en D.

☊ = 10ˢ 15° 55′	
5.11. 4	0,86670
5.26.59	9,94993+
	0,81663+
	= + 6″, 56.

Il reste à trouver la nutation solaire en déclinaison; car pour celle en ascension droite, quoiqu'elle puisse aller à 1″ de temps, on peut se permettre de la négliger, vu que l'on est loin de connaître à la précision d'une seconde le temps du passage de la polaire au méridien. Or on a

nut. sol. en déclin. = 0″,1067 cos 2☉ — 0″,3864 sin 2☉ ;

et à cause de ☉ = 4ˢ19°13′, il vient, en opérant par les logarithmes à 4 décimales,

log. constant =	9,0283	log. constant =	9,5870 —
cos 2☉ =	9,1663 +	sin 2☉ =	9,9953 —
	8,1946 +		9,5823 +
	= + 0″016		= + 0″382
	+ 0,382		
nut. sol. =	+ 0″398		

La nutation solaire est donc de $0'',4$. On évite ce petit calcul au moyen de la table XII, *Géodésie*, T. II, qui donne le facteur par lequel il faut multiplier la variation annuelle en déclinaison, pour avoir égard tant au mouvement de précession qu'à la nutation solaire. En effet, le 12 août ce facteur est 0,63 à partir du 1[er] janvier; mais il doit être augmenté d'une unité, parce que la position moyenne de la polaire n'est connue que pour le 1[er] janvier 1821, et qu'on la demande pour le 12 août 1822. Multipliant donc la variation annuelle en déclinaison $19'',47$ par 1,63, on aura

$$\textit{précession} + \textit{nut. sol.} = +31'',74.$$

Lorsqu'on réunit ainsi la nutation solaire en déclinaison avec le mouvement de précession, l'on a, après j jours du 1[er] janvier,

$$19'',47 \times \frac{j}{365} + \textit{nut. en } D = 19'',47\left(\frac{j}{365} + y\right);$$

d'où
$$y = \frac{\textit{nut. en } D}{19'',47} = 0{,}0054 \cos 2\odot - 0{,}0198 \sin 2\odot\,;$$

le facteur de la table XII est donc généralement $\frac{j}{365} + y$.

Quoique la nutation solaire en ascension droite soit peu importante relativement à la polaire, on la déterminera, si l'on veut, au moyen de cette formule qui la donne en secondes de degré,

$$\textit{nut. sol. en } Æ = -14'',597 \cos 2\odot - 4'',311 \sin 2\odot.$$

Il serait bien facile de former une table qui la comprît aussi avec la précession; mais encore une fois cela est inutile.

Récapitulant les résultats ci-dessus, on a

position moyenne le 1[er] janv. 1821,	$Æ = 0^h\,57'\,15'',32$		$D = 88°\,21'\,13'',90$
précession. . . .	$+\,23,60$	précess. + nut. sol.	$+\,31,74$
aberration. . . .	$+\,24,08$	aberration. . . .	$-\,16,12$
nutation lunaire...	$-\,11,08$	nutation lunaire...	$+\,6,56$
le 12 août 1822, position appar.	$Æ' = 0^h\,57'\,51'',92$,		$D' = 88°\,21'\,56'',08$.

Si l'on répète ce calcul pour le 15 août 1822, on trouvera que la position apparente de la polaire était

$$Æ'' = 0^h\,57'\,53'', \quad D'' = 88°\,21'36'',75;$$

ainsi, dans l'intervalle de 3 jours l'ascension droite Æ' a augmenté de 1'',1, et la déclinaison D' s'est accrue de 0'',67. En supposant donc ces accroissemens proportionnels au temps, l'on a pour le 13

asc. dr. appar. $= 0^h\,57'\,52'',3$, *décl. appar.* $= 88°\,21'\,36'',3$ (*).

Maintenant que le temps sidéral du passage supérieur est connu, on aura le temps moyen ainsi qu'il suit :

temps sidéral du passage	= $0^h\,57'\,52''3$
distance de l'équinoxe au soleil, à midi, le 13 août à Étampes.	= 14.29.56,9
temps vrai approché. . .	= 15.27.49,2
	= 15.46.

Mais la distance de l'équinoxe au soleil ayant diminué de 226'',1 du 13 au 14, selon la *Connaissance des Tems*, on a proportionnellement pour $15^h,46$ une diminution de 2' 25'',65. De là,

temps vrai approché. . . .	= $15^h\,27'\,49''20$
mouvement du ☉ en asc. dr.	— 2.25,65
temps vrai exact.	15.25.23,55
équation du temps.	+ 4.31,92
temps moyen du passage. . .	15.29.55,47.

(*) Quand les positions apparentes des étoiles ont été calculées, ainsi qu'il précède, pour les passages supérieurs et inférieurs, on les rapporte aisément à une époque quelconque, en supposant leurs variations proportionnelles au temps. M. Schumacher, dans les nouvelles Éphémérides qu'il publie chaque année à Copenhague, donne les ascensions droites et les déclinaisons apparentes d'un grand nombre d'étoiles, ce qui dispense de tout calcul à cet égard. Les positions apparentes de la polaire, par exemple, s'y trouvent de 12 heures en 12 heures pour tous les jours de l'année. Cet ouvrage intéressant a pour titre : *Astronomische Hülfstafeln*, etc.

Le chronomètre de Berthoud, que j'ai eu à ma disposition et qui se trouvait réglé sur le temps moyen, a exigé cette conversion du temps sidéral. Quand on sera muni d'une pendule, il sera plus commode de la régler sur les étoiles, si l'on veut déterminer les latitudes et les azimuts de nuit.

Les observations des passages de β de la petite Ourse concourant avec celles de la polaire à donner la latitude géographique avec une grande précision, il est utile de connaître aussi la position moyenne de cette étoile; la voici :

au 1[er] janv. 1821, Æ $= 14^h\, 51'\, 20'',01$, variation ann. — $0'',305$
D $= 74°\, 53'\, 9'',26$, variation ann. — $14,82$.

Dans ces variations annuelles est compris le mouvement propre.

Les formules de nutation solaire relatives à cette même étoile sont en secondes de degré,

nut. sol. en Æ $= + 1'',1802 \cos 2\odot + 0'',0857 \sin 2\odot$,
nut. sol. en D $= - 0'',2954 \cos 2\odot + 0'',2922 \sin 2\odot$.

On doit y avoir égard dans les observations importantes.

Nous ferons remarquer, en terminant cette note, que la formule (6) du n° 2 donnerait la réduction connue au méridien (*Géodésie*, T. II, p. 125), en la prolongeant jusqu'au terme du 4[e] ordre inclusivement, et y faisant ensuite $P = 0$; mais il faudrait exprimer les coefficiens différentiels des ordres supérieurs en fonction du coefficient différentiel du 1[er] ordre et de ses puissances. Par exemple on aurait

$$\frac{d^3N}{dP^3} = -\frac{dN}{dP} - 3 \cot P \cot N . \frac{dN^2}{dP^2} + (1 + 3\cot^2 N)\frac{dN^3}{dP^3},$$

$$\frac{d^4N}{dP^4} = -\cot P . \frac{dN}{dP} + (4 - 3\cot^2 P)\cot N . \frac{dN^2}{dP^2}$$
$$+ 6(1 + 3\cot^2 N)\cot P . \frac{dN^3}{dP^3} - 3(3 + 5\cot^2 N)\cot N . \frac{dN^4}{dP^4};$$

. . . .

et à cause de $\frac{dN}{dP} = \frac{\sin P \cos H \cos D}{\sin N}$, il ne resterait de la série (6), par

suite de la supposition de $P = 0$, que les termes de rang pair. Ce serait, comme l'on voit, arriver assez péniblement à la réduction dont il s'agit.

NOTE III.

La réduction du temps vrai ou du temps moyen au temps sidéral, s'effectue à l'aide de la petite table suivante.

Pour 1^h, ajoutez	9"86	Pour 1', ajoutez	0",164	Pour 1", ajoutez	0",002
2	19,71	2	0,329	2	0,005
3	29,57	3	0,493	3	0,008
4	39,43	4	0,657	4	0,011
5	49,28	5	0,821	5	0,013
6	59,14	6	0,986	6	0,015
7	1' 9,01	7	1,150	7	0,017
8	1.18,85	8	1,314	8	0,019
9	1.28,71	9	1,479	9	0,022
10	1.38,57	10	1,643	10	0,027
20	3.17,14	20	3,286	20	0,055
24	3.56,56	30	4,928	30	0,082

La table IV du *Traité de Géodésie*, T. II, qui sert pour convertir une durée sidérale en moyenne, peut remplacer celle-ci. Par exemple, on veut réduire 9^h de temps moyen en temps sidéral : cherchez dans cette table, vis-à-vis 9^h, la réduction approchée 1' 28",47; cherchez de nouveau, dans cette même table et séparément, les nombres correspondans à 1'28", vous trouverez vis-à-vis 1' le nombre 0",16, et vis-à-vis 28" le nombre 0",08. Enfin, ajoutez ces trois nombres entre eux, et la réduction cherchée sera 1'28",71, comme par la table ci-dessus.

NOTE IV.

Dans le calcul des observations azimutales, nous avons supposé implicitement que la réfraction, pendant la durée de la série, était constamment égale à celle correspondante à l'époque moyenne. Relativement à la polaire, cette hypothèse paraît en effet permise; mais en est-il de même à l'égard du soleil, dont le mouvement en hauteur est très rapide à peu de distance de l'horizon? C'est ce qui nous reste à examiner pour compléter la théorie actuelle.

On a vu au n° 9, que $G_m = G + \Sigma \frac{\delta G}{n}$, et que la correction moyenne $\Sigma \frac{\delta G}{n}$ était donnée par la série

$$\Sigma \frac{\delta G}{n} = \frac{dG}{dg} . \Sigma \frac{\delta g}{n} + \frac{dG}{dN} . \Sigma \frac{\delta N}{n} + \ldots$$

Or, la réfraction élevant les objets dans le sens vertical, les seuls termes qui doivent faire connaître l'effet de ce phénomène sur $\Sigma \frac{\delta G}{n}$ sont ceux en δN; il faut donc y écrire $\delta N' + r'$, $\delta N'' + r''$..., au lieu de $\delta N'$, $\delta N''$...; et comme alors chaque différence δG s'accroît de $\delta \sigma$, on aura $\delta G' + \delta \sigma'$, $\delta G'' + \delta \sigma''$..., au lieu de $\delta G'$, $\delta G''$...; par suite,

$$\Sigma \frac{\delta \sigma}{n} = \frac{dG}{dN} \left(\frac{r' + r'' + r''' + \ldots}{n} \right) + \frac{d^2G}{dN^2} \left(\frac{r'^2 + r''^2 + r'''^2 + \ldots}{2n} \right) + \text{etc.}$$

Maintenant si l'on fait, comme au n° 2, $r' = r + \delta r'$, $r'' = r + \delta r''$..., et qu'on ait simplement égard, dans cette série, au premier terme qui est le plus considérable, il viendra

$$\Sigma \frac{\delta \sigma}{n} = \frac{dG}{dN} . r + \frac{dG}{dN} . \Sigma \frac{\delta r}{n}.$$

Or, le terme $\frac{dG}{dN} . r$ étant évidemment compris dans l'arc apparent G, dont nous avons obtenu une valeur très approchée au n° 12, l'erreur commise sur $\Sigma \frac{\delta G}{n}$ sera seulement représentée par $\frac{dG}{dN} \Sigma \frac{\delta r}{n}$.

En supposant donc que les vingt observations rapportées au n° cité eussent duré 30 minutes, la distance zénitale du soleil aurait varié de 5° environ, et les réfractions correspondantes aux milieux des deux demi-intervalles, auraient différé l'une de 14″, l'autre de 20″ de celle qui convient à la distance zénitale $N = 74°$: en sorte que $\Sigma \frac{\delta r}{n} = \frac{20'' - 14''}{2} = 3''$ environ. De là et d'après la valeur du coefficient différentiel $\frac{dG}{dN}$ obtenue au n° 12, il est aisé de conclure que

$$\Sigma \frac{\delta r}{n} = -0'',31 ;$$

quantité qu'on peut considérer comme nulle. Cette analyse prouve donc que la différence de 4″,8 entre notre résultat et celui de Delambre ne provient pas de la suppression de $\Sigma \frac{\delta r}{n}$ dans la valeur de $\Sigma \frac{\delta G}{n}$. Le changement de déclinaison n'a non plus aucune influence sensible sur l'azimut A_m déduit des vingt observations citées, ainsi qu'on s'en assurerait facilement en recourant aux formules de la page 27.

NOTE V.

Les observations azimutales par la polaire sont susceptibles d'être calculées assez simplement par les formules du n° 4; c'est ce que nous nous proposons de faire voir dans cette note.

Conservons la notation du n° cité; c'est-à-dire, désignons par G_m l'arc moyen de distance entre le réverbère et l'étoile; mais rapportons tous les angles horaires P', P''... au méridien apparent du réverbère; et dans ce but, calculons d'abord l'angle φ que ce méridien fait avec celui du lieu de l'observation, à l'aide du triangle sphérique ZPR dans lequel on connaît la distance zénitale $ZR = M$, la colatitude C_1, c'est-à-dire celle C diminuée de la réfraction, et approximativement l'azimut $RZP = 180° - A$. Si, au contraire, cet azimut était tout-à-fait inconnu, et que les observations eussent eu lieu, comme dans l'exemple choisi, à l'époque de la plus courte distance de l'étoile au réverbère, on ferait $K_1 = G_m + \Delta_1$, ou, ce qui revient au même, on désignerait par K_1 l'arc apparent RP qui représente le troisième côté du triangle ZPR, et qui se compose de l'arc mesuré G_m et de la distance polaire Δ affectée de la réfraction. On pourra, par conséquent, déterminer l'angle $RPZ = \varphi$ de ce triangle, et par suite l'heure sidérale du passage de l'étoile au méridien apparent du réverbère; laquelle est, dans le cas actuel, égale à l'ascension droite de l'étoile augmentée de l'angle φ. Enfin, la différence de cette heure, à l'époque moyenne des observations, sera l'angle horaire moyen P, compté à partir de ce méridien apparent; et les différences δP de tous les temps de la pendule au temps correspondant à l'angle horaire moyen seront, comme au n° 12, les élémens des réductions des distances observées au

méridien dont il s'agit. Ces calculs préliminaires étant faits, on évaluera les deux formules

$$(1)\quad x = 2\Delta_1 \sin^2 \tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} \Delta_1^2 \sin 1'' \sin^2 P \cot G_n - \tfrac{1}{3} \Delta_1^3 \sin^2 1'' \sin^2 P \cos P,$$

$$(2)\quad \Sigma \frac{\delta x}{n} = (\sin \Delta_1 \cos P + \sin^2 \Delta_1 \cos 2P \cot G_n) . \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''},$$

qui dérivent, comme celles (7) et (9) du n° 4, de la propriété du triangle sphérique ZPS, dans lequel le côté $PS = \Delta_1$ est très petit à l'égard des deux autres. Elles seront générales si l'on compte l'angle horaire P à partir de la plus courte distance de l'étoile S au réverbère, et depuis o jusqu'à 360°. Ensuite on aura, pour la plus courte distance K_1 du réverbère au pôle apparent,

$$(3)\qquad K_1 = G_n + \Delta_1 - \left(x + \Sigma \frac{\delta x}{n}\right).$$

Cette distance et les arcs C_1, M seront les trois côtés connus d'un triangle sphérique dont l'angle opposé à K_1 représentera l'azimut cherché du réverbère.

Type du calcul.

D'après le n° 13, on a

distance zénitale du réverbère,	M = 89° 5′ 40″0,
colatitude — réfraction. . . .	C_1 = 48.37.11,6,
et à peu près.	K_1 = 102.10. 8,0,

lorsqu'on résout le triangle RZP dans lequel on sait déjà que l'angle RZP = 107° 9′ 3″ environ. En ajoutant G_n = 100° 23′ 51″ à la distance polaire Δ = 1° 47′ 43″, on trouverait K_1 = 102° 11′ 34″; mais il est à peu près indifférent d'employer ici l'une ou l'autre valeur.

Si l'on fait usage des trois données précédentes, on trouvera

l'angle horaire φ opposé à M	= 77° 47′ 15″
et en temps sidéral.	φ = 5h 11′ 9″
diminuant cet angle de l'accélération des fixes (table IV, *Géodésie*, T. II). . .	. . . — 50,9
on a angle horaire, temps moyen,	= 5h 10′ 18″1

d'autre part, angle hor. temps moy. =	$5^h\,10'\,18'',1$
D'ailleurs, le temps moyen du passage au méridien de Montjoui. . . . . =	1.47.39,2
Donc, le temps moyen du passage au méridien apparent du réverbère. . . ... =	6.57.57,3
et comme la pendule retardait de.	13.36,4
le passage au méridien du réverbère en temps de la pendule. . . . . =	6.44.20,9
D'un autre côté, l'époque moyenne des observations a eu lieu à. . . . . =	7.18.59
donc l'angle horaire, temps moyen. . . P =	0.34.38,10
réduction au temps sidéral (note III). . .	+ 5,69
angle horaire moyen en temps sidéral... P =	$0^h\,34'\,43'',79$
et en arc. . . . . P =	$8°\,40'\,55'',7$.

Un autre élément des formules (1) et (2) est la distance polaire Δ affectée de la réfraction et représentée par Δ_1. Or, en désignant par r la réfraction à la hauteur du pôle, par Z l'azimut de l'étoile, compté du nord, et par N la distance zénitale, calculés l'un et l'autre pour l'époque moyenne (n° 10 et 13), on a, d'après l'art. 332 de la *Géodésie*, T. II,

$$\Delta_1 = \Delta - \frac{2r\sin(C+N)}{\sin\Delta}\sin^2\tfrac{1}{2}Z \quad (*).$$

Dans cette formule, $N = 48°33'6''$, $C = 48°38'16''$, $r = 1'\,4'',42$, $\Delta = 1°47'43'',4$, $Z = 2°23'28''$; et l'on trouve $\Delta_1 - \Delta = \delta\Delta = -1'',8$; partant,

$$\Delta_1 = 1°\,47'\,41'',6.$$

Calculant ensuite les formules (1) et (2), dans la seconde desquelles $\log\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{n.\sin 1''} = \log F = 1,40654$, on a

(*) On aurait l'effet dG de la réfraction r sur l'arc de distance apparent G, au moyen de cette formule :

$$G + dG = G + \frac{r\cos M}{\sin G\,\sin N_1} - r\cot G\cot N_1.$$

Formule (1).

1er terme.

$\log 2 = 0{,}3010300$
$\log \Delta_1 = 3{,}8103435$
$\sin \frac{1}{2} P = 8{,}8790620$

$8{,}8790620$
$1{,}8694975 = +\, 74'',045$

$\log \Delta_1 = 3{,}81034$
$\cos P = 9{,}99499$
$3{,}80533$

2e terme.

$\log \Delta_1 = 3{,}81034$
$\sin P = 9{,}17883$
$2{,}98917$
$2{,}98917$
$\log . \frac{1}{2} \sin 1'' = 4{,}38454$
$\cot G_m = 9{,}26361 -$
$9{,}62649 -$
$= -\, 0'',42$

3e terme.

$\log \frac{1}{3} \sin^2 1'' = 8{,}89402 -$
$\log (\Delta_1 \sin P) = 2{,}98917$
$2{,}98917$
$\log (\Delta_1 \cos P) = 3{,}80533$
$8{,}67769 -$
$= -\, 0'',015$

1er terme $= +\, 74'',04$
2^e terme $= -\, 0,42$
3^e terme $= -\, 0,05$
$x = +\, 73,57$

Formule (2).

1er terme.

$\sin \Delta_1 = 8{,}49587$
$\cos P = 9{,}99499$
$8{,}49086 +$
$\log F = 1{,}40654$
$9{,}89740 +$
$= +\, 0''790$
$-\, 0{,}004$
$\Sigma \frac{\delta x}{n} = +\, 0{,}786$

2e terme.

$\sin^2 \Delta_1 = 6{,}99174$
$\cos 2P = 9{,}97975$
$\cot G_m = 9{,}26361 -$
$6{,}23510 -$
$\log F = 1{,}40654$
$7{,}64164 -$
$= -\, 0'',004$

Formule (3).

Enfin, distance mesurée, $G_m = 100^\circ\, 23'\, 51''$
distance polaire, $\Delta_1 = 1.47.41{,}6$
$G_m + \Delta_1 = 102.11.32{,}6$
— réduction $\left(x + \Sigma \frac{\delta x}{n}\right) = -\, 1.14{,}4$
dist. appar. du signal au pôle, $= 102.10.18{,}2$

On connait maintenant les trois côtés du triangle sphérique apparent RZP, savoir :

$$K_1 = 102° 10' 18''2,$$
$$M = 89. 5.40,$$
$$C_1 = 48.37.11,6;$$

ainsi, en désignant par σ leur demi-somme, on aura l'azimut $180° - A_m$ du réverbère au moyen de cette formule connue,

$$\sin(90° - \tfrac{1}{2} A_m) = \sqrt{\frac{\sin(\sigma - M)\sin(\sigma - C_1)}{\sin M \sin C_1}}.$$

Tout calcul fait, on trouve

$$90° - \tfrac{1}{2} A_m = 53° 34' 38''8,$$

et comme au n° cité, $180° - A_m = 107.\ 9.17,6.$

Cette solution n'impose pas l'obligation d'observer l'étoile polaire très près de sa plus courte ou de sa plus grande distance du réverbère; néanmoins, on fera bien de saisir cette circonstance si rien ne s'y oppose.

Au lieu de compter, comme ci-dessus, les angles horaires δP à partir du milieu de l'intervalle, comptons-les au contraire à partir du méridien apparent du signal. Dans ce cas, $P = 0$, $x = 0$, et l'équation (2) devient

$$\Sigma \frac{\delta x}{n} = (\sin \Delta_1 + \sin^2 \Delta_1 \cot C_m) . \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''};$$

on a même un peu plus simplement, selon M. Legendre,

$$\Sigma \frac{\delta x}{n} = \frac{2 \sin \Delta_1 \sin K_1}{\sin(K_1 - \Delta_1)} . \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''};$$

(voyez le *Traité de Géodésie*, T. II, p. 162).

Voilà plusieurs manières de calculer les azimuts; on choisira donc celle qui paraîtra la plus commode et la moins sujette à erreur. Lorsqu'on emploiera la lunette méridienne à la détermination de ces angles, les observations seront plus faciles et les calculs beaucoup plus simples; mais vu les dépenses qu'il faut faire

pour transporter cet instrument aux diverses stations et l'y établir solidement, le cercle et le théodolite répétiteurs seront souvent préférés en Géodésie. Cependant, le Dépôt de la Guerre, qui ne néglige rien pour assurer le succès des opérations fondamentales de la nouvelle carte de France, vient, d'après le désir de M. de Laplace, de faire construire par Gambey, l'un de nos plus habiles artistes, une excellente lunette des passages et un grand cercle astronomique, principalement destinés pour la mesure de la perpendiculaire de Brest à Strasbourg, et celle d'une partie du parallèle moyen qui s'étend depuis la tour de Cordouan jusqu'à Fiume. Il y a lieu d'espérer que ces deux grandes opérations, qu'on exécute avec tout le soin que leur importance exige, ne tarderont pas à répandre de nouvelles lumières sur la véritable figure de la terre.

NOTE VI.

Les observations astronomiques que j'ai faites cette année à Étampes, ont servi d'exercice aux élèves de l'École d'application des Ingénieurs-Géographes : elles ont toutes été calculées par la méthode exposée dans le présent Mémoire, et par celle généralement en usage; ce qui n'a pas peu contribué à me convaincre que la première est la plus expéditive quand le nombre des observations est considérable. Le lieu où j'avais établi mon cercle répétiteur a été lié à trois points de la triangulation secondaire exécutée par les élèves eux-mêmes, pour y rattacher leurs levés de détail. On a employé, à cet effet, le procédé de l'art. 20 du *Traité de Topographie*, etc., 2ᵉ édition; lequel consiste à déterminer la position d'un point par ses coordonnées rectangles, lorsque les coordonnées pareilles de trois autres points sont connues. Mais la solution que j'ai donnée de ce problème repose sur une hypothèse qui n'est pas toujours admissible.

Par exemple, lorsque les points donnés sur la carte assujettie au système de projection employé pour la carte de France, sont à peu de distance du méridien principal développé en ligne droite, les angles observés sur le terrain non loin de ces points, et leurs projections sur la carte, sont sensiblement dans le rapport d'égalité; mais comme dans toute autre circonstance il n'en est pas

de même, il est important de savoir déterminer généralement ce rapport, afin de rendre possible la solution citée.

Dans mon *Instruction sur l'usage des tables de projection adoptées pour la construction du canevas de la nouvelle carte topographique du Royaume* (Paris, 1821), j'ai démontré que si Z et Z_1 sont, sur la terre, les azimuts de deux points observés d'un horizon quelconque D, et que Z', Z'' soient les azimuts correspondans sur la projection modifiée de Flamstéed, on a exactement

$$(1) \qquad \text{tang}(Z'-Z)=\frac{\frac{\sin Z \sin(Z-u)}{\cos^2 Z}\sin u}{1+\frac{\sin Z \sin(Z-u)}{\cos^2 Z}\cos u},$$

et à fort peu près

$$(2) \qquad Z'-Z''=Z-Z_1+u\sin(Z-Z_1)\sin(Z+Z_1);$$

u étant l'angle que la tangente à la courbe du méridien sur la carte fait avec le rayon vecteur R du point de contact D; auquel cas

$$u=p\sin H-\theta,$$

p étant la longitude et H la latitude du point D, et θ désignant l'angle du rayon vecteur R avec le méridien principal. (*Topographie*, art. 53, 2ᵉ édit.)

Il suit de là que si du point D qu'on veut lier à trois autres A, B, C, dont les coordonnées rectangles sur la carte sont connues, on observe les angles α, γ, sous lesquels on voit les droites BC, AB, les coordonnées de D s'obtiendront par les formules de l'art. 20 de l'ouvrage cité, pourvu qu'avant tout l'on réduise chacun des angles α, γ par la formule (2) précédente, à l'aide de l'azimut de l'une des distances AD, DB, DC, et de la position géographique du point D calculés approximativement.

Je ferai remarquer par occasion que, lorsque K représente sur la terre la distance de deux points A, B, et que Z est l'azimut de B sur l'horizon de A, les différences des coordonnées rectangles de ces points sur la carte, dérivent, en vertu de la notation actuelle,

des deux formules suivantes :

$$\log \Delta x = \log[\mathrm{K}\cos(\mathrm{Z}-\theta)] - \frac{u \sin 1'' \mathrm{M} \sin\theta \cos \mathrm{Z}}{\cos(\mathrm{Z}-\theta)},$$

$$\log \Delta y = \log[\mathrm{K}\sin(\mathrm{Z}-\theta)] - \frac{u \sin 1'' \mathrm{M} \cos\theta \cos \mathrm{Z}}{\sin(\mathrm{Z}-\theta)};$$

M étant le module 0,43429.

De ces différences de coordonnées on passe aisément aux coordonnées absolues qui, comme l'on sait, se comptent à partir du point dont la longitude est zéro, et la latitude 50 grades.

On a aussi, en représentant par K′ la projection de K,

$$\log \mathrm{K}' = \log \mathrm{K} - \tfrac{1}{2}\, u \sin 1'' \mathrm{M} \sin 2\mathrm{Z}.$$

La méthode des coordonnées rectangles ou des distances à la méridienne et à la perpendiculaire, que j'ai ainsi appropriée au mode de projection dont il s'agit, a cela d'avantageux qu'elle dispense de tracer sur les feuilles minutes les méridiens et les parallèles, et qu'elle y dispose néanmoins tous les points trigonométriques comme à l'aide de leurs latitudes et de leurs longitudes.

SUPPLÉMENT.

Sur les observations de latitude.

Les légères modifications que nous avons cru devoir faire, n° 4, à la méthode que M. Littrow a exposée dans la *Correspondance astronomique et géographique* de M. de Zach (pag. 70, tom. VI), pour déduire, à toute heure du jour, la latitude terrestre des observations de la polaire, viennent d'être vivement critiquées par M. Hoss, professeur à Marienbrunn (même Correspondance, tom. VIII, p. 528); mais il est aisé de faire voir que cette critique amère porte entièrement à faux, et que la formule de correction que nous avons désignée par le n° 9, pag. 17, est indispensable, quand

on groupe les observations en grand nombre, surtout à une époque autre que celle de la plus grande digression.

Remarquons d'abord que si l'on voulait appliquer immédiatement à la solution du problème dont il s'agit, la méthode de M. Soldner, il faudrait commencer par corriger la distance zénitale moyenne observée N_m de manière à la faire correspondre exactement au milieu de l'intervalle, c'est-à-dire, à l'angle horaire moyen P; ainsi on aurait (n° 2)

$$N = N_m - \Sigma \frac{\delta N}{n} = N_m - \frac{d^2 N}{dP^2} \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n \sin 1''};$$

il faudrait ensuite résoudre par les voies ordinaires un triangle sphérique dans lequel on connaîtrait deux côtés N, Δ et l'angle P opposé à N. On aurait donc par le deuxième cas de la résolution des triangles de cette espèce (Trigonométrie de M. Legendre, 12ᵉ édit. p. 407),

$$\tang \varphi = \tang \Delta \cos P,$$

$$\cos (90° - H - \varphi) = \frac{\cos \varphi}{\cos \Delta} \cos N.$$

Cette solution, que nous attribuons à M. Soldner, parce qu'elle nous paraît avoir été publiée pour la première fois par ce savant, est précisément celle que M. Littrow a donnée à la pag. 370 du tom. IV de la Correspondance de M. de Zach, et que nous nous étions abstenu de citer. Pour en faire l'application, il est indispensable de connaître approximativement la latitude cherchée H, puisque le coefficient différentiel $\frac{d^2 N}{dP^2}$, que nous avons donné sous forme finie, p. 3, est fonction de cette quantité. Cependant comme il s'agit ici d'observations de la polaire, il est possible d'éliminer cet élément inconnu de ce coefficient; ce qui ne laisse pas d'être avantageux dans la pratique. La correction de distance zénitale obtenue p. 17, est donc simplement

$$\Sigma \frac{\delta x}{n} = (\sin \Delta \cos P + \sin^2 \Delta \cos 2 P \cot N \ldots) \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n \sin 1''}.$$

Elle se trouve de la sorte exprimée en série convergente, et il est évident qu'elle est exacte, aux quantités près du cinquième ordre. On est cependant dispensé d'en tenir compte, lorsque l'angle horaire P diffère très peu de 90°, ou bien lorsque l'on groupe les observations en très petit nombre; mais c'est une erreur de soutenir qu'elle est toujours *inutile* et *surérogatoire*. Nous pensons qu'aucun astronome ne partage à cet égard l'opinion de M. le professeur de Marienbrunn.

Sur les observations azimutales.

Quoique nous nous soyons beaucoup étendu sur le calcul des observations azimutales, nous présenterons encore sous une nouvelle forme la valeur du coefficient différentiel $\frac{d^2z}{dP^2}$ qui entre dans la formule (3), p. 27.

Pour cet effet, considérons le triangle sphérique ZPS, qui donne, en conservant la notation du n° 8,

$$\frac{dz}{dP} = \frac{\sin\Delta}{\sin N}\cos S,$$

et différencions une seconde fois, il viendra

$$\frac{d^2z}{dP^2} = -\frac{\sin\Delta\sin S}{\sin N}\cdot\frac{dS}{dP} - \frac{\sin\Delta\cos S\cos N}{\sin^2 N}\cdot\frac{dN}{dP};$$

mais à cause de $\frac{dS}{dP} = \frac{\sin C\cos z}{\sin^2 N}$, et de $\frac{dN}{dP} = \sin S\sin\Delta$, on a définitivement, en ayant égard à une formule de Trigonométrie connue,

$$\frac{d^2z}{dP^2} = -\frac{\sin\Delta\sin S}{\sin^2 N}(\cos\Delta\sin N + 2\cos z\sin C):$$

expression qui rend fort simple le calcul des observations azimutales faites en grand nombre avec un théodolite répétiteur.

Relativement à la polaire, z diffère très peu de deux angles droits

dans notre climat ; ainsi, à très peu près, $\cos z = -1$ et $\sin^2 C = \sin^2 N$; d'ailleurs comme $\sin S = \frac{\sin P \sin C}{\sin N}$, on a

$$\frac{d^2 z}{dP^2} = \frac{\sin \Delta \sin P}{\cos H} = \sin z,$$

du moins sensiblement ; partant,

$$\text{correct. d'azim. } \Sigma \frac{\delta z}{n} = \frac{\sin \Delta \sin P}{\cos H} \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''};$$

formule d'une exactitude toujours suffisante. Au reste, on a plus exactement encore,

$$\Sigma \frac{\delta z}{n} = \left(\frac{\sin \Delta \sin P}{\cos H} + 2 \sin^2 \Delta \sin 2 P \frac{\tang H}{\cos H} \right) \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n . \sin 1''}.$$

On voit par là que quand l'astre est au méridien, auquel cas $P = S = 0$, l'on a $\frac{d^2 z}{dP^2} = 0$; c'est-à-dire qu'alors la correction d'azimut est nulle. Ainsi, en comparant un objet ter[illegible] avec un astre qui serait très près du méridien, l'azimut calculé, comme à l'ordinaire, pour l'époque moyenne des observations, correspondrait précisément à l'arc de distance moyen g_m. Toutefois l'erreur dont l'angle horaire P pourrait être affecté, aurait la plus grande influence sur l'azimut (nº 10).

ERRATA.

Page 10, ligne 7, $N =$, *lisez* $C =$

14, 9, en remontant, $-\frac{1}{2}\Delta^2$, *lisez* $+\frac{1}{2}\Delta^2$

14, 11 en remontant, $\frac{1}{}\Delta^3$, *lisez* $-\frac{1}{6}\Delta^3$

16, 7, $\frac{\sin^2 P}{\sin N}$, *lisez* $\frac{\sin^2 P}{\sin^2 N}$

19, 7 en remontant, l. $\frac{1}{3} \sin 1''$, *lisez* l. $\frac{1}{3} \sin^2 1''$

27, 1, $\frac{d^3 z}{dP^4} =$, *lisez* $\frac{d^3 z}{dP^3} =$; et $\frac{d^2 z}{dP^3}$ *lisez* $\frac{d^2 z}{dP^2}$

33, 6, au dénominateur, *effacez* $\sin^2 P$.

